École Normale Supérieure
9 octobre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n^{o}3

Exercice 1 : questions diverses

1. Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$. On définit le graphe de f par :

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \text{ tq } x \in X\} \subset X \times Y$$

a) Montrer que, si Y est séparé, le graphe de f est fermé dans $X \times Y$ pour la topologie produit si f est continue.
b) Montrer que, si Y est compact, f est continue si $\mathcal{G}(f)$ est fermé.
c) Donner un contre-exemple à la propriété précédente dans le cas où Y n'est pas compact.

2. Soit X un ensemble. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X telles que X est compact pour $\mathcal{T}_2$ et séparé pour $\mathcal{T}_1$. Montrer que si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, alors $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

3. Donner un exemple d'un espace compact non séquentiellement compact.

4. [Topologie quotient, à faire avant l'exercice 5]
Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On note $Y = X/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence de X pour la relation $\mathcal{R}$.
On note $\pi : x \in X \to [x] \in Y$ l'application qui à un élément de X associe sa classe d'équivalence.
On dit que $U \subset Y$ est un ouvert si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X.
a) Montrer que cette définition forme bien une topologie sur Y.
b) Soit Z un espace topologique. Montrer qu'une application $f : Y \to Z$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : X \to Z$ est continue.

Exercice 2 : exemples d'espaces compacts

Les espaces suivants sont-ils compacts ?

1. L'espace $E = [0; 1]^{[0;1]}$ des fonctions de $[0; 1]$ vers $[0; 1]$, muni de la topologie produit ?
2. L'espace $F \subset E$ des fonctions 1-lipschitziennes, muni de la topologie induite par celle de E ?
3. L'espace $G \subset E$ des fonctions continues, muni de la topologie induite par celle de E ?

Exercice 3 : les compacts sont normaux

Soit X un espace topologique compact.

1. Montrer que X est régulier : pour tout fermé $F \subset X$ et tout $x \in X - F$, il existe deux ouverts disjoints de X, U et V, tels que $F \subset U$ et $x \in V$.
2. Montrer que X est normal.

Rappel du TD précédent : on dit que X est normal si, pour tous fermés disjoints, F_1 et F_2, il existe U_1 et U_2 des ouverts disjoints tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$.

Exercice 4 : compactification d'Alexandrov

Soit X un espace topologique localement compact.

On pose $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. On dit que $U \subset \hat{X}$ est un ouvert de $\hat{X}$ si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

1. $U \subset X$ et U est un ouvert de X.
2. $\infty \in U$ et $\hat{X} - U \subset X$ est un compact de X.

On note $i : X \to \hat{X}$ l'application qui à $x \in X$ associe $i(x) = x \in \hat{X}$.

1. Montrer que la façon dont on a choisi les ouverts de $\hat{X}$ définit bien une topologie sur $\hat{X}$.

2. Montrer que $\hat{X}$ est compact pour cette topologie.

3. Montrer que i est un homéomorphisme sur son image.

4. Montrer qu'à homéomorphisme près, $\hat{X}$ est le seul espace topologique vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\hat{X}$ est compact.
2. Il existe $i : X \to \hat{X}$ une application réalisant un homéomorphisme sur son image telle que $\hat{X} - i(X)$ est de cardinal 1.

Exercice 5 : trois compactifications du plan euclidien

On appelle compactification d'un espace topologique X la donnée d'un espace topologique compact Y et d'une application continue $i : X \to Y$ telles que :

- $i(X)$ est dense dans Y
- i réalise un homéomorphisme de X vers $i(X)$

Le but de cet exercice est de présenter trois compactifications différentes de $\mathbb{R}^2$, muni de sa topologie usuelle.

1. Soit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. On appelle *pôle nord* le point $N = (0, 0, 1)$.
Soit $i : \mathbb{R}^2 \to S^2$ l'application qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le point $P \in S^2 - \{N\}$ tel que la droite de $\mathbb{R}^3$ reliant P au pôle Nord passe par $(x, y, 0)$.
a) Montrer que (S^2, i) est une compactification de $\mathbb{R}^2$ et qu'elle est homéomorphe à la compactification d'Alexandrov définie dans l'exercice précédent.
b) À quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers le pôle Nord ?

2. Soit $S^2_+ = \{(x, y, z) \text{ tq } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0\}$.
Soit $i : \mathbb{R}^2 \to S^2_+$ l'application qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le point de S^2_+ appartenant à la droite de $\mathbb{R}^3$ reliant $(x, y, 1)$ et $(0, 0, 0)$.
a) Montrer que (S^2_+, i) est une compactification de $\mathbb{R}^2$.
b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. À quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers le point $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ de S^+_+ ?

3. [Digression sur le plan projectif]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ par :

$$x \sim x' \iff \exists r \in \mathbb{R}^* \text{ tq } x = rx'$$

On note $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$, muni de la topologie quotient (définie à la question 4 de l'exercice 1).
a) Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $S^n/\sim_S$, où S^n désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $x \sim_S x'$ si et seulement si $x = \pm x'$.
b) Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est compact.

4. Soit $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ l'application qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe $[(x, y, 1)] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), i)$ est une compactification.
b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. À quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers $[(\cos\theta, \sin\theta, 0)]$?

Exercice 6 : compactification de Stone-Čech

Soient X un espace topologique et $\mathcal{F}_X$ l'ensemble des fonctions continues de X vers $[0; 1]$. Soit :

$$E_X = [0; 1]^{\mathcal{F}_X} = \prod_{f \in \mathcal{F}_X} [0; 1]$$

On définit une application $\phi : X \to E_X$ par :

$$\phi(x) = \{f(x)\}_{f \in \mathcal{F}_X}$$

1. Montrer que, si E_X est muni de la topologie produit, ϕ est une application continue.

2. Dans cette question, on suppose que X est un espace normal et séparé.
a) Montrer que ϕ est injective.
b) Montrer que ϕ est ouverte vers son image, c'est-à-dire que l'image par ϕ d'un ensemble ouvert de X est un ensemble ouvert de $\phi(X)$.
c) En déduire que X est homéomorphe à un sous-ensemble de $[0; 1]^{\mathcal{F}_X}$.

3. On ne suppose maintenant plus que X est normal. On pose :

$$Y_X = \overline{\phi(X)}$$

Montrer que Y_X est compact et que $\phi(X)$ est dense dans Y_X.

4. Nous allons montrer que la propriété suivante est vraie : si Z est un espace topologique compact et $g : X \to Z$ est une fonction continue, alors il existe une fonction $h : Y_X \to Z$ continue telle que $g = h \circ \phi$.
a) On suppose d'abord que $Z = [0; 1]^I$, muni de la topologie produit, pour un certain ensemble I. On note, pour tout $i \in I$, $p_i : Z \to [0; 1]$ la projection sur la i-ème coordonnée.
Montrer que $h : \{u_f\}_{f \in \mathcal{F}_X} \in Y_X \to \{u_{p_i \circ g}\}_{i \in I} \in Z$ vérifie les propriétés voulues.
b) Montrer la propriété pour Z sous-ensemble compact de $[0; 1]^I$ (avec la topologie induite).
c) Montrer la propriété pour tous les compacts Z.
d) Montrer qu'une telle fonction h est unique.
On appelle Y_X la *compactification de Stone-Čech* de X.