Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$3

Corrigé

Exercice 1

1. a) Nous allons montrer que le complémentaire est ouvert. Soit $(x,y) \in (X \times Y) - \mathcal{G}(f)$. On a alors $y \neq f(x)$.
Soient U, V deux ouverts disjoints de Y tels que $y \in U$ et $f(x) \in V$. Soit $W \subset X$ un voisinage ouvert de x tel que, $f(W) \subset V$. Un tel voisinage existe car f est continue.
Alors $W \times U$ est un ouvert de $X \times Y$. Il contient (x,y) mais n'a pas d'intersection avec $\mathcal{G}(f)$. En effet, pour tout $x \in X$, si $x \in W$, alors $f(x) \in V$ donc $f(x) \notin U$ et $(x, f(x)) \notin W \times U$.
b) Supposons que f n'est pas continue. Soient $x_0 \in X$ et V un voisinage ouvert de $f(x_0)$ tel qu'il n'existe pas un voisinage U de x_0 pour lequel $f(U) \subset V$.
Soit $P = \{\overline{f(U) - V}$ tq $U \subset X$ est un voisinage ouvert de $x_0\}$.
Si $U_1, ..., U_n$ sont un nombre fini de voisinages ouverts de x_0, $\bigcap_{k \leq n} \overline{f(U_k) - V}$ est un ensemble non-vide (car il contient $f(U_1 \cap ... \cap U_n) - V$ qui est non-vide par hypothèse).
Puisque $Y - V$ est compact (c'est un fermé de Y), cela implique que $\bigcap_{S \in P} S \neq \emptyset$. Soit y_0 un point dans cet ensemble. Aucun voisinage de (x_0, y_0) dans $X \times Y$ n'est disjoint de $\mathcal{G}(f)$ (en effet, si $(x_0, y_0) \in U \times W$ avec U, W ouverts, $y_0 \in \overline{f(U) - V}$ par définition de y_0 donc $W \cap f(U) \neq \emptyset$).
Pourtant, $(x_0, y_0) \notin \mathcal{G}(f)$ (car $y_0 \notin V$ donc $y_0 \neq f(x_0)$). Donc $\mathcal{G}(f)$ n'est pas fermé.
c) Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$. Cette fonction n'est pas continue mais son graphe est fermé.

2. L'application $Id : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ est une application continue (puisqu'un ouvert de $\mathcal{T}_1$ est un ouvert de $\mathcal{T}_2$) d'un espace compact vers un espace séparé. D'après une propriété du cours, l'application est donc un homéomorphisme. Cela signifie que sa réciproque, $Id : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$, est continue, et donc que $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

3. Soit $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$.
On munit $\{0,1\}$ de la topologie discrète ; c'est alors un compact. On pose :

$$X = \{0,1\}^A$$

et on munit X de la topologie produit.
D'après le théorème de Tychonoff, X est compact. Montrons en revanche qu'il n'est pas séquentiellement compact.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{(n)} = (1_E(n))_{E \in A}$, où, pour tout $E \subset A$, $1_E(n)$ vaut 1 si $n \in E$ et 0 sinon. Montrons que $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente.
En effet, supposons par l'absurde que $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction telle que $(u^{(\phi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $u^{(\infty)}$ au sens de la topologie produit.

Converger pour la topologie produit signifie que, pour toute $E \subset A$, $(u_E^{(\phi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u_E^{(\infty)}$ (voir à ce sujet l'exercice du TD 1 portant sur la topologie de la convergence simple).
Choissons $E = \{\phi(2n) \text{ tq } n \in \mathbb{N}\}$. Alors $u_E^{(\phi(n))}$ vaut 1 si n est pair et 0 si n est impair. La suite $(u_E^{(\phi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas. C'est absurde.
4. a) $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $\pi^{-1}(Y) = X$ donc $\emptyset$ et Y sont des ouverts.
De plus, si U_1 et U_2 sont des ouverts, alors $\pi^{-1}(U_1 \cap U_2) = \pi^{-1}(U_1) \cap \pi^{-1}(U_2)$ est une intersection d'ouverts de X donc est un ouvert de X. L'ensemble $U_1 \cap U_2$ est alors bien un ouvert de Y.
Enfin, si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de Y, $\pi^{-1}\left(\bigcup_i U_i\right) = \bigcup_i \pi^{-1}(U_i)$ est un ouvert de X donc $\bigcup_i U_i$ est un ouvert de Y.
b) L'application π est continue par définition : si U est un ouvert de Y, $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X.
Si $f : Y \to Z$ est continue, l'application $f \circ \pi : X \to Z$ est donc également continue : c'est une composée d'applications continues.
Réciproquement, si $f \circ \pi$ est continue, alors, pour tout $V \subset Z$ ouvert, $(f \circ \pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(f^{-1}(V))$ est un ouvert de X. L'ensemble $f^{-1}(V)$ est donc un ouvert de Y. Puisque c'est vrai pour tout ouvert de Z, cela implique que f est continue.

Exercice 2

1. E est compact par le théorème de Tychonov.

2. F est un compact. Pour le démontrer, il suffit de démontrer que F est un fermé de E (qui est compact d'après la question précédente).
Pour tous $x, y \in [0; 1]$ tels que $x \neq y$, posons $F_{x,y} = \{f \in E \text{ tq } |f(x) - f(y)| \leq |x - y|\}$. Cet ensemble est un fermé de E. En effet, l'application $\phi_{x,y} : f \in E \to f(x) - f(y)$ est continue pour la topologie produit (car c'est une différence de fonctions continues) donc $F_{x,y} = \phi_{x,y}^{-1}([-|x - y|; |x - y|])$ est un fermé de E.
Puisque $F = \bigcap_{x\neq y} F_{x,y}$, F est un fermé.

3. G n'est pas compact.
Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n telle que :

$$f_n(x) = \max(0, 1 - nx) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers la fonction g qui vaut 1 en 0 et 0 partout ailleurs. Elle a donc une unique valeur d'adhérence dans E, qui est g. Puisque $g \notin G$, G n'est pas fermé ; ce n'est donc pas un sous-ensemble compact de E.

Exercice 3

1. Soient $F \subset X$ un fermé et $x \in X - F$.
Pour tout $y \in F$, il existe U_y et V_y deux ouverts disjoints tels que $x \in U_y$ et $y \in V_y$. C'est une conséquence du fait que X est séparé.
Puisque $F \subset \bigcup_{y\in F} V_y$ et puisque F est compact (car il s'agit d'un fermé d'un compact), il existe un ensemble fini $y_1, ..., y_s$ de points de F tels que :

$$F \subset V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_s}$$

On pose alors $V = V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_s}$ et $U = U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_s}$. Ces ouverts sont disjoints, car U_y et V_y sont disjoints pour tout y. De plus, $F \subset V$ et $x \in U$.

2. On procède de la même façon qu'à la question précédente.
Soient F et G deux fermés disjoints de X. On peut supposer que ces deux fermés sont non-vides (sinon, prendre $U = X$ et $V = \emptyset$ ou l'inverse convient).
Pour tout $x \in G$, il existe, d'après la question précédente, U_x et V_x deux ouverts disjoints tels que $x \in U_x$ et $F \subset V_x$.
Puisque $G \subset \bigcup\limits_{x \in G} U_x$ et G est compact, il existe un nombre fini d'éléments de G, $x_1, ..., x_s$, tels que :

$$G \subset U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_s}$$

On pose alors $U = U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_s}$ et $V = V_{x_1} \cap ... \cap V_{x_s}$. Ces ensembles sont ouverts et disjoints. On a $G \subset U$ et $F \subset V$.

Exercice 4

Remarquons d'abord (on s'en servira dans plusieurs questions) qu'avec cette définition des ouverts de $\hat{X}$, tout ouvert U de $\hat{X}$ est tel que $U \cap X$ est ouvert dans U (si U vérifie 1., c'est évident ; si U vérifie 2., $U \cap X = X - (\hat{X} - U)$ donc U est le complémentaire d'un sous-ensemble fermé de X).

1. Les ensembles $\emptyset$ et $\hat{X}$ vérifient respectivement les propriétés 1 et 2 ; ce sont donc des ouverts.
Si U_1 et U_2 sont ouverts, alors :

- si $U_1, U_2 \subset X$, alors $U_1 \cap U_2 \subset X$ et $U_1 \cap U_2$ est une intersection finie d'ouverts de X, donc un ouvert de X ; alors $U_1 \cap U_2$ est un ouvert de X.
- si $U_1 \subset X$ et $\infty \in U_2$, alors $U_1 \cap U_2 \subset X$. Alors $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap (X \cap U_2)$ est un ouvert. Donc $U_1 \cap U_2$ vérifie la propriété 1 et est un ouvert.
- si $\infty \in U_1$ et $U_2 \subset X$, même raisonnement que dans le cas précédent.
- si $\infty \in U_1$ et $\infty \in U_2$, on a $\infty \in U_1 \cap U_2$ et $\hat{X} - (U_1 \cap U_2) = (\hat{X} - U_1) \cup (\hat{X} - U_2)$. Dans un espace séparé (et c'est le cas ici car X est localement compact donc séparé), une union de compacts est un compact. Donc $\hat{X} - (U_1 \cap U_2)$ est un compact et $U_1 \cap U_2$ vérifie la propriété 2 donc est un ouvert.

Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de $\hat{X}$, montrons que $\bigcup\limits_i U_i$ est aussi un ouvert.

- si $\infty \notin U_i$ pour tout i, alors $\bigcup\limits_i U_i \subset X$ est est une union d'ouverts de X, donc un ouvert de X. Donc $\bigcup\limits_i U_i$ est un ouvert de $\hat{X}$.
- s'il existe i_0 tel que $\infty \in U_{i_0}$, alors $\infty \in \bigcup\limits_i U_i$. De plus :

$$\begin{aligned} \hat{X} - \bigcup_i U_i &= \bigcap_i (\hat{X} - U_i) \\ &= \bigcap_i (X - X \cap U_i) \cap (\hat{X} - U_{i_0}) \end{aligned}$$

L'ensemble $(\hat{X} - U_i) \cap X$ est un fermé pour tout i. L'ensemble $(X - X \cap U_i) \cap (\hat{X} - U_{i_0})$ est donc, pour tout i, un fermé du compact $\hat{X} - U_{i_0}$. Une intersection de fermés étant fermée, $\hat{X} - \bigcup\limits_i U_i$ est un sous-ensemble fermé d'un compact ; c'est un compact.

Donc $\bigcup_i U_i$ vérifie la propriété 2 et est ouvert.

2. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\hat{X}$ dont l'union est $\hat{X}$. Montrons qu'on peut en extraire un recouvrement fini.
Puisque $\infty \in \bigcup_i U_i$, il existe i_0 tel que $\infty \in U_{i_0}$. L'ensemble $\hat{X} - U_{i_0}$ est un compact de X, qui est inclus dans l'union des $(X \cap U_i)$.
Pour tout i, $X \cap U_i$ est un ouvert de X. Il existe donc $i_1, ..., i_s$ un nombre fini d'indices tels que :

$$\hat{X} - U_{i_0} \subset (X \cap U_{i_1}) \cup ... \cup (X \cap U_{i_s})$$

Pour ce choix d'indices, on a :

$$\hat{X} \subset U_{i_0} \cup ... \cup U_{i_s}$$

Si on montre que $\hat{X}$ est séparé, on aura donc montré que X est compact. Deux points disjoints $x, y \in X \subset \hat{X}$ sont séparés par des ouverts disjoints de $\hat{X}$ car ils sont séparés par des ouverts disjoints de X.
Traitons le cas où $x = \infty$ et $y \neq \infty$. Puisque X est localement compact, y admet un voisinage compact V. Alors $U = \hat{X} - V$ et $\mathring{V}$ sont des ouverts disjoints dont l'un contient x et l'autre y.

3. L'application i est bijective vers son image. Elle est continue. En effet, si U est un ouvert de $\hat{X}$, $i^{-1}(U) = X \cap U$ est un ouvert de X.
La réciproque $i^{-1} : i(X) \to X$ est aussi continue : si V est un ouvert de $i(X) = X \subset \hat{X}$, il existe U un ouvert de $\hat{X}$ tel que $V = X \cap U$. Donc $V = i^{-1}(V)$ est un ouvert de X.

4. On a vu que $\hat{X}$ vérifiait ces propriétés. Supposons maintenant que Y vérifie également ces propriétés et montrons que $\hat{X}$ et Y sont homéomorphes.
Notons $j : X \to Y$ l'application vérifiant la propriété 2 et notons ∞_Y l'unique point de $Y - j(X)$.
On définit une application $\phi : Y \to \hat{X}$ par :

$$\phi(j(x)) = i(x) \text{ si } x \in X$$
$$\phi(\infty_Y) = \infty$$

Il s'agit d'une bijection. Montrons qu'il s'agit d'une application continue.
Soit U un ouvert de $\hat{X}$. Montrons que $\phi^{-1}(U)$ est un ouvert de Y.

- Premier cas : $U \subset X$. Dans ce cas, $\phi^{-1}(U) = j(U)$. Puisque j est un homéomorphisme sur son image, $j(U)$ est un ouvert de $j(X)$. L'ensemble $j(X)$ est lui-même un ouvert de Y (car il est égal à Y privé d'un point et, dans un espace séparé, les singletons sont fermés). Un ouvert d'un ouvert étant un ouvert, $j(U)$ est ouvert dans Y.
- Deuxième cas, $\infty \in U$ et $\hat{X} - U$ est un compact de X. Alors $\phi^{-1}(\hat{X} - U) = j(\hat{X} - U)$ donc $\phi^{-1}(\hat{X} - U)$ est l'image d'un compact par une application continue, j. Donc $j(\hat{X} - U)$ est un compact de $j(U)$; c'est aussi un compact de Y. Un sous-ensemble compact d'un espace séparé est nécessairement fermé donc $\phi^{-1}(\hat{X} - U)$ est un fermé. Puisque $\phi^{-1}(U)$ est son complémentaire, $\phi^{-1}(U)$ est ouvert.

Nous avons donc montré que ϕ était une bijection continue. Puisque X et Y sont compacts, ϕ est un homéomorphisme.

Exercice 5

1. a) Calculons une expression analytique de i.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Notons $(x',y',z') = i(x,y) \in S^2$.
On veut que $(x',y',z'),(0,0,1)$ et $(x,y,0)$ soient alignés. Il doit donc exister $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x',y',z') - (0,0,1) = t((x,y,0) - (0,0,1))$$

c'est-à-dire :

$$(x',y',z') = (tx, ty, 1-t)$$

Comme on souhaite avoir $(x',y',z') \in S^2$, il faut :

$$1 = t^2(x^2+y^2) + (1-t)^2 \quad \iff \quad t(t(x^2+y^2+1)-2) = 0$$

La seule possibilité autre que $t=0$ est donc $t = \frac{2}{x^2+y^2+1}$. On trouve ainsi :

$$i(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$$

Cette application est bien définie et continue.
Montrons qu'elle réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vers $S^2 - \{N\}$.
On vérifie que la fonction suivante

$$i^{-1}(x',y',z') = \left(\frac{x'}{1-z'}, \frac{y'}{1-z'}\right)$$

est bien définie et continue sur $S^2 - \{N\}$. On a $i \circ i^{-1} = Id_{S^2-\{N\}}$ et $i^{-1} \circ i = Id_{\mathbb{R}^2}$.
Puisque $S^2 - \{N\}$ est dense dans S^2, (S^2, i) est bien une compactification de $\mathbb{R}^2$.
Elle est homéomorphe à la compactification d'Alexandrov définie dans l'exercice précédent car elle vérifie les deux conditions de la question 4 de cet exercice.
b) Puisqu'on a calculé l'expression de i à la question précédente, on voit qu'il faut que $x_n^2 + y_n^2$ converge vers $+\infty$ (pour que la dernière coordonnée tende vers 1) et que cela suffit.
2. a) Un calcul similaire à celui de la question précédente permet d'obtenir :

$$i(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right)$$

et :

$$i^{-1}(x',y',z') = \left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}\right)$$

Ces deux applications sont continues et inverses l'une de l'autre, ce qui montre que i réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vers $S_+^2 - \{(x,y,z) \in S_+^2 \text{ tq } z = 0\}$. Comme $S_+^2 - \{(x,y,z) \in S_+^2 \text{ tq } z = 0\}$ est dense dans S_+^2, on a bien une compactification.
b) Une suite $i(x_n, y_n)$ converge vers $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ si et seulement si $||(x_n,y_n)||_2$ tend vers $+\infty$ et l'angle entre les vecteurs $(1,0)$ et (x_n,y_n) tend vers θ.
3. a) Si $[(x_1,...,x_{n+1})]$ est un élément de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, on pose :

$$f([(x_1,...,x_{n+1})]) = \pi_S\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+...+x_{n+1}^2}}, ..., \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_1^2+...+x_{n+1}^2}}\right)$$

où $\pi_S : S^n \to S^n / \sim_S$ désigne la projection sur les classes d'équivalence de $\sim_S$.
Cette application est bien définie : si on choisit deux représentants de la même classe d'équivalence, on obtient la même définition.
Elle est continue. En effet, si on note $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la projection sur les classes d'équivalence de $\sim$, on a :

$$f \circ \pi(x_1, ..., x_{n+1}) = \pi_S \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_{n+1}^2}}, ..., \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_{n+1}^2}} \right)$$

C'est une application continue : cela garantit la continuité de f, d'après la question 4.b) du premier exercice.
La fonction f admet de plus pour réciproque l'application suivante :

$$g([x_1, ..., x_{n+1}]_S) = \pi(x_1, ..., x_{n+1})$$

qui est continue car $g \circ \pi_S = \pi \circ Id_{S^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}$ est continue.
Donc f réalise un homéomorphisme de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ vers $S^n / \sim_S$.
b) L'espace $S^n / \sim_S$ est l'image de S^n par l'application continue π_S.
Montrons que $S^n / \sim_S$ est séparé : soient $[x]_S$ et $[y]_S$ deux éléments distincts de $S^n / \sim_S$. Pour $\epsilon > 0$, notons $U_\epsilon = S^n \cap (B(x, \epsilon) \cup B(-x, \epsilon))$ et $V_\epsilon = S^n \cap (B(y, \epsilon) \cup B(-y, \epsilon))$. Leurs images dans $S^n / \sim_S$ sont des ouverts (car ils sont saturés pour la relation d'équivalence $\sim_S$) ; pour ϵ assez petit, ils sont disjoints. L'un contient $[x]_S$ et l'autre $[y]_S$.
Puisque S^n est compact et puisque l'image d'un compact par une application continue est un compact, $S^n / \sim_S$ est compact. Comme $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ lui est homéomorphe, il est également compact.
4. a) L'application i est continue (c'est la composée de π et de $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$, qui sont deux applications continues). Elle est aussi injective.
Son image est $E = \{[(x, y, z)] \text{ tq } z \neq 0\}$. Cet ensemble est dense dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. En effet, tout point de son complémentaire est de la forme $[(x, y, 0)] = \lim_{n \to +\infty} [(x, y, 1/n)]$.
Montrons pour conclure que $i^{-1} : E \to \mathbb{R}^2$ est continue.
Remarquons que E, muni de la topologie induite, est homéomorphe à $(\mathbb{R}^3 - \{(x, y, 0)\}_{x,y \in \mathbb{R}}) / \sim$, muni de la topologie quotient (de façon générale, avec les notations de la question 4 de l'exercice 1, si $U \subset X$ est un ouvert saturé pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, la topologie quotient $U/\mathcal{R}$ est la même que la topologie induite sur $U/\mathcal{R}$ par la topologie de $X/\mathcal{R}$). Pour montrer que i^{-1} est continue, il suffit donc de montrer que $i^{-1} \circ \pi$ est continue. C'est le cas puisque :

$$i^{-1} \circ \pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right)$$

b) Il faut que $||(x_n, y_n)||$ tende vers $+\infty$ et $\frac{y_n}{x_n}$ tende vers $\tan \theta$ (ou $\frac{x_n}{y_n} \to 0$ dans le cas où $\theta \equiv \pi/2 [\pi]$ n'est pas défini).
Pour simplifier, on le démontre dans le cas où $\tan \theta$ est définie.
Supposons d'abord que $i(x_n, y_n) \to [(\cos \theta, \sin \theta, 0)]$.
Pour tout $\alpha > 1$ et tout $M > 0$, l'ensemble

$$E_{\alpha,M} = \{[(x, y, z)] \text{ tq } x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{\alpha} \tan \theta < \frac{y}{x} < \alpha \tan \theta \text{ et } M|z| < \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

est un ouvert de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (car son antécédant par π est un ouvert de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$).
Puisque cet ensemble contient $[(\cos\theta, \sin\theta, 0)]$, il doit contenir tous les $i(x_n, y_n) = [(x_n, y_n, 1)]$ à partir d'un certain rang. Donc, à partir d'un certain rang :

$$||(x_n, y_n)|| > M \text{ et } \frac{1}{\alpha}\tan\theta < \frac{y_n}{x_n} < \alpha\tan\theta$$

Puisque c'est vrai pour tous α et M, la condition énoncée plus haut est nécessaire.
Elle est également suffisante. En effet, supposons qu'elle est vérifiée. On peut vérifier qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$ telle que $\frac{x_n\epsilon_n}{||(x_n,y_n)||} \to \cos\theta$ et $\frac{y_n\epsilon_n}{||(x_n,y_n)||} \to \sin\theta$.
Alors :

$$i(x_n, y_n) = [(x_n, y_n, 1)] = \left[\frac{x_n\epsilon_n}{||(x_n, y_n)||}, \frac{y_n\epsilon_n}{||(x_n, y_n)||}, \frac{\epsilon_n}{||(x_n, y_n)||}\right] \to [(\cos\theta, \sin\theta, 0)]$$

(car l'application π est continue donc envoie une suite convergente vers une suite convergente)

Exercice 6
Notons $\pi_f : E_X \to [0;1]$ la projection sur la coordonnée f.
On va utiliser à deux reprises dans cet exercice le fait qu'une application $\phi : X \to E_X$ est continue si et seulement si, pour toute $f \in \mathcal{F}_X$, l'application $\pi_f \circ \phi : X \to [0;1]$ est continue. Un sens est clair : une composée de fonctions continues est continue. L'autre sens peut se démontrer en revenant à la définition de la topologie produit.

1. Pour toute $f \in \mathcal{F}_X$, $\pi_f \circ \phi(x) = f(x)$ est une application continue puisque f est continue.

2. a) Pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $f : X \to [0;1]$ tel que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$ (puisqu'un espace normal possède la propriété d'Urysohn et puisque, comme l'espace est séparé, $\{x\}$ et $\{y\}$ sont fermés).
Pour cette fonction f, $\pi_f(\phi(x)) = 0 \neq 1 = \pi_f(\phi(y))$ donc $\phi(x) \neq \phi(y)$.
b) Soit $U \subset X$ un ouvert. Montrons que $\phi(U)$ est ouvert dans $\phi(X)$.
Soit $x \in U$ quelconque. Il faut montrer que $\phi(U)$ contient un voisinage ouvert de $\phi(x)$.
Soit $f : X \to [0;1]$ une fonction continue qui vaut 1 sur $X - U$ et 0 en x (une telle fonction existe car X est normal et $\{x\}, X - U$ sont deux fermés disjoints).
Posons $V = \pi_f^{-1}([0;1[)$. C'est un ouvert élémentaire de E_X.
L'ensemble $\phi(X) \cap V$ est donc un ouvert de $\phi(X)$. Il contient $\phi(x)$ car $\pi_f(\phi(x)) = f(x) = 0$. De plus, il est inclus dans $\phi(U)$. En effet, si $\phi(y) \in V$, $f(y) = \pi_f(\phi(y)) \neq 1$ donc $y \notin X - U$, par définition de f. Donc $y \in U$ et $\phi(y) \in \phi(U)$.
c) L'application $\phi : X \to \phi(X)$ est continue et bijective. De plus, elle est ouverte. C'est donc un homéomorphisme.

3. L'ensemble E_X est compact, par le théorème de Tychonov. Puisque Y_X est fermé dans E_X, cet ensemble est aussi compact.
Un ensemble est toujours dense dans son adhérence.

4. a) Notons toujours, pour toute $f \in \mathcal{F}_X$, $\pi_f : E_X \to [0;1]$ la projection sur la coordonnée f (qui est continue).
L'application h est continue puisque, pour tout $i \in I$, $p_i \circ h$ est continue (c'est la restriction à Y_X de l'application $\pi_{p_i \circ g}$, qui est continue).

De plus, pour tout $x \in X$, $h \circ \phi(x) = h(\{f(x)\}_{f \in \mathcal{F}_X}) = \{p_i \circ g(x)\}_{i \in I} = g(x)$.
b) On pose $Z' = [0;1]^I$. Puisque $g : X \to Z$ est continue et $Z \subset Z'$, on peut étendre g en une fonction $g' : X \to Z'$, qui est aussi continue.
Soit $h' : Y_X \to Z'$ continue telle que $h' \circ \phi = g'$. Elle existe d'après la question précédente.
Pour tout $y \in \phi(X)$, $h'(y) \in Z$. En effet, $y = \phi(x)$ pour un certain x et $h'(y) = h'(\phi(x)) = g'(x) = g(x)$. Donc, puisque h' est continue, $h'(Y_X) = h'(\overline{\phi(X)}) \subset \overline{h'(\phi(X))} \subset \overline{Z} = Z$. En effet, comme Z est un sous-ensemble compact de Z', il est fermé.
On peut donc restreindre h' en une application continue $h : Y_X \to Z$. Puisque $h' \circ \phi = g'$, $h \circ \phi = g$.
c) Un compact Z est toujours normal. Il est donc homéomorphe à un certain sous-ensemble Z' de $[0;1]^I$, d'après la question 2. Ce Z' est compact.
Soit $G : Z \to Z'$ un homéomorphisme.
Puique $G \circ g$ est une fonction continue, il existe, d'après la question précédente, $h' : Y_X \to Z'$ continue telle que $h' \circ \phi = G \circ g$. ALors $G^{-1} \circ h' : Y_X \to Z$ est continue et vérifie $h \circ \phi = g$.
d) Supposons que h et h' sont deux fonctions continues de Y_X vers Z telles que $g = h \circ \phi = h' \circ \phi$.
Pour tout $x \in X$, $h(\phi(x)) = h'(\phi(x))$ donc $h = h'$ sur $\phi(X)$. L'ensemble $\{y \in Y_X \text{ tq } h(y) = h'(y)\}$ est un fermé (car h et h' sont continues et Z est séparé (car compact)). Il contient $\phi(X)$ donc il est égal à Y_X, puisque $\phi(X)$ est dense dans Y_X.
Les fonctions h et h' sont donc égales.