École Normale Supérieure — Topologie, analyse et calcul différentiel
16 octobre 2014

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$4

Exercice 1 : questions diverses

1. Soit (X,d) un espace métrique complet. Soit $f : X \to X$ une application continue telle que f^p est contractante pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f admet un unique point fixe.

2. Montrer qu'un espace localement connexe par arcs est connexe par arcs si et seulement si il est connexe.

3. a) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
b) [Plus difficile] Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

4. a) Trouver un espace topologique X et deux distances d, d' qui engendrent la même topologie sur X, telles que (X,d) est complet mais pas (X,d').
b) Soit (X,d) un espace métrique complet. Soit $U \subset X$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(1) Il existe une distance d' sur U qui engendre la même topologie que d et pour laquelle (U,d') est complet.
(2) U est une intersection dénombrable d'ouverts de X.
[Indication pour (1) $\Rightarrow$ (2) : commencer par se ramener au cas où d' est bornée et U est dense dans X. Démontrer ensuite qu'il existe une fonction de (X,d) dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de continuité est U et utiliser la question 1 de l'exercice 4.
Pour (2) $\Rightarrow$ (1) : commencer par le cas où U est un ouvert de X.]

Exercice 2 : complété d'un espace métrique

Soit (X,d) un espace métrique.
On note $\mathcal{C}_b(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme.
Soit $x_0 \in X$ quelconque. Pour tout $x \in X$, on définit :

$$f_x : y \in X \to d(y,x) - d(y,x_0)$$

1. a) Montrer que $\mathcal{C}_b(X,\mathbb{R})$ est complet.
b) Montrer que $x \in X \to f_x \in \mathcal{C}_b(X,\mathbb{R})$ réalise une isométrie de X vers son image.
c) En déduire qu'il existe un espace métrique $(\tilde{X},\tilde{d})$ et une application continue $i : X \to \tilde{X}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\tilde{X}$ est complet.
2. $i(X)$ est dense dans $\tilde{X}$
3. i réalise une isométrie de (X,d) vers $(i(X),\tilde{d})$

2. Montrer que l'espace $(\tilde{X}, \tilde{d})$ vérifiant les propriétés de la question précédente est unique à isométrie près.

3. [Exemples]

Pour chacun des espaces métriques suivants, dire s'il est complet. S'il ne l'est pas, en décrire un complété.

(a) L'espace $\mathcal{P}$ des fonctions polynomiales sur $[0;1]$, muni de la norme $||P||_\infty = \sup_{[0;1]} |P(t)|$.

(b) L'espace E_0 des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$, avec la norme $||f||_\infty$.

(c) L'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact, avec la norme $||f||_\infty$.

Exercice 3 : existence de fonctions continues nulle part dérivables

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$R_n = \{f \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}) \text{ tq } \exists t, \forall s, |f(s) - f(t)| \leq n|s - t|\}$$

1. Montrer que R_n est fermé dans $(\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$.

2. Montrer que R_n est d'intérieur vide.

3. En déduire qu'il existe des fonctions continues de $[0;1]$ vers $\mathbb{R}$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0;1]$.

Exercice 4

Soient X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique.

1. Soit $f : X \to Y$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$E_n = \{x \in X \text{ tq } \exists \mathcal{V} \text{ un voisinage de } x \text{ tel que } \forall x', x'' \in \mathcal{V}, d(f(x'), f(x'')) < 1/n\}$$

Montrer que les E_n sont des ouverts de X et que $\{x \text{ tq } f \text{ est continue en } x\} = \bigcap_n E_n$.

2. On suppose maintenant $X = Y = \mathbb{R}$. On munit Y de la distance usuelle.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ &= \frac{1}{q} \quad \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p, q \in \mathbb{Z}, q > 0 \text{ et } \frac{p}{q} \text{ irréductible} \end{aligned}$$

Montrer que f est continue en x si et seulement si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

b) Montrer, à l'aide du théorème de Baire, qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit continue en x si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$.

3. On suppose toujours $X = Y = \mathbb{R}$. Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'ouverts de X. Posons $U = \bigcap_n E_n$. Nous allons montrer qu'il existe une fonction $f : X \to Y$ dont l'ensemble des points de continuité est U.

a) Montrer qu'il existe une fonction $h : X \to [3/4; 1]$ qui ne soit continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $x \in X$, notons $N(x) = \min\{n \text{ tq } x \notin E_n\}$. On pose, par convention, $N(x) = \infty$ si $x \in \bigcap_n E_n$.

Montrer que l'ensemble des points de continuité de la fonction $f : x \to 2^{-N(x)}h(x)$ est exactement $\bigcap_n E_n$.

Exercice 5 : espaces bizarres

1. On note $E = \{(x,1) \text{ tq } x \in [0;1]\} \cup \{(0,0)\} \cup \{(1/n, y) \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*, y \in [0;1]\}$.
Montrer que E est connexe mais pas connexe par arcs.

2. On note $E = \{(x, rx) \text{ tq } r \in \mathbb{Q} \cap [0;1]\}$.
Montrer que E est connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs.

3. Soit X un espace topologique. On considère les deux relations d'équivalences suivantes :
(i) $\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y$ si x et y appartiennent à la même composante connexe.
(ii) $\forall x, y \in X, x\mathcal{S}y$ si, pour toute fonction $f : X \to \{0, 1\}$ continue, $f(x) = f(y)$.
a) Montrer que ces définitions sont équivalentes lorsque X est localement connexe.
b) Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble suivant :

$$E = \{(0,0)\} \cup \{(0,1)\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, y\right) \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{R}\right\}$$

Déterminer la classe d'équivalence de $(0,0)$ pour les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

Exercice 6 : connexité de la topologie cofinie

Soit X un ensemble infini. On apelle *topologie cofinie* sur X la topologie dont les ouverts sont l'ensemble vide et les ensembles de complémentaire fini.

1. Montrer que X est connexe et localement connexe.

2. Dans cette question, on va montrer que, si $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition disjointe de $[0;1]$ en fermés, alors tous les F_n sont vides, sauf l'un qui vaut $[0;1]$.
Posons $G = \bigcup_n \partial F_n$, où ∂F_n désigne le bord de F_n dans $[0;1]$.
a) Montrer que G est fermé dans $[0;1]$.
b) Montrer que, si G est non-vide, il existe $a < b \in \mathbb{R}$ tels que $]a;b[\cap G$ est non-vide et inclus dans l'un des F_n.
c) Montrer qu'il est impossible que G soit non-vide. Conclure.
d) Montrer que, si X est dénombrable, X n'est pas connexe par arcs.

3. On suppose ici que X n'est pas dénombrable. On suppose de plus qu'il existe une injection de $\mathbb{R}$ dans X (c'est toujours le cas si on admet l'hypothèse du continu).
Montrer que X est connexe par arcs.

Exercice 7

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts connexes non-vides. Soit $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

1. Soient U, V des ouverts disjoints de K_0 qui recouvrent K. Montrer que $K \subset U$ ou $K \subset V$.

2. En déduire que K est connexe.