

Feuille d'exercices n°4

Corrigé

Exercice 1

1. Soit p tel que f^p est contractante.

D'après un théorème de point fixe, l'application f^p admet un unique point fixe sur X . Notons-le x_0 et montrons qu'il s'agit aussi d'un point fixe pour f .

On a $f^p(f(x_0)) = f^{(p+1)}(x_0) = f(f^p(x_0)) = f(x_0)$.

Donc $f(x_0)$ est également un point fixe de f^p . Puisque le point fixe est unique :

$$x_0 = f(x_0)$$

On a donc montré l'existence d'un point fixe pour f . Ce point fixe est unique car tout point fixe de f est aussi un point fixe de f^p et le point fixe de f^p est unique.

2. Un espace connexe par arcs est nécessairement connexe.

Montrons réciproquement que si X est un espace topologique localement connexe par arcs et connexe, alors il est connexe par arcs.

Soit $x \in X$ quelconque. Montrons que, pour tout $y \in X$, il existe un chemin dans X reliant x et y .

Soit $U = \{y \in X \text{ tq } \exists \phi \in \mathcal{C}([0; 1], X), \phi(0) = x, \phi(1) = y\}$.

L'ensemble U est ouvert. En effet, pour tout $y \in U$, il existe un voisinage V connexe par arcs de y (puisque X est localement connexe par arcs). Tous les points de V sont reliés à y par un chemin continu. Puisque y est relié à x par un chemin continu, tous les points de V sont aussi reliés à x par un chemin continu. Donc $V \subset U$.

Le complémentaire de U est ouvert. En effet, pour tout $y \notin U$, il existe un voisinage V connexe par arcs de y . Aucun point de V n'est relié à x par un chemin continu : puisque chaque point est relié à y par un chemin continu, si l'un des points était relié à x , y serait également relié à x et appartiendrait à U .

L'ensemble U est donc ouvert et fermé dans X . Il n'est pas vide (car il contient x). Puisque X est connexe, on doit avoir $U = X$. Donc tous les points de X sont reliés à x par un chemin continu.

3. a) Si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme, alors $\phi : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{\phi(0)\}$ est aussi un homéomorphisme. Mais $\mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas connexe alors que $\mathbb{R}^2 - \{\phi(0)\}$ (le plan privé d'un point) est connexe. Ce n'est pas possible.

b) Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une injection continue. Montrons que ce n'est pas une surjection.

Lemme 1.1. *Pour tout $K > 0$, $\phi([-K; K])$ est d'intérieur vide dans \mathbb{R}^2 .*

Démonstration. Posons $\Omega = \phi([-K; K])$ et supposons par l'absurde que cet ensemble n'est pas d'intérieur vide.

Soit $y_0 \in \overset{\circ}{\Omega}$. Puisque $\overset{\circ}{\Omega}$ est infini (c'est un ouvert non-vidé de \mathbb{R}^2 ; il contient donc une boule ouverte), on peut supposer que $y_0 \neq \phi(-K)$ et $y_0 \neq \phi(K)$. Il existe donc $x_0 \in]-K; K[$ tel que $y_0 = \phi(x_0)$.

Montrons que l'ensemble $\Omega - \{y_0\}$ est connexe. Soit $r > 0$ tel que $B(y_0, r) \subset \Omega$. Si $\Omega - \{y_0\} = F_1 \cap F_2$ avec F_1, F_2 deux fermés disjoints de $\Omega - \{y_0\}$, $F_1 \cap (B(y_0, r) - \{y_0\}) = \emptyset$ ou $F_2 \cap (B(y_0, r) - \{y_0\}) = \emptyset$ (car $B(y_0, r) - \{y_0\}$ est connexe). Supposons que $F_1 \cap (B(y_0, r) - \{y_0\}) = \emptyset$. Alors on peut vérifier que F_1 et $F_2 \cup \{y_0\}$ sont deux fermés disjoints de Ω dont l'union est Ω . Puisque Ω est connexe (c'est l'image d'un connexe par une fonction continue), l'un des deux fermés est vide. Donc $F_1 = \emptyset$. Donc $\Omega - \{y_0\}$ est connexe.

L'application $\phi : [-K; K] \rightarrow \Omega$ réalise un homéomorphisme (c'est une bijection dont l'ensemble de départ est compact). Donc $\phi : ([-K; K] - \{x_0\}) \rightarrow (\Omega - \{y_0\})$ est aussi un homéomorphisme, entre un espace non-connexe et un espace connexe. C'est absurde. \square

Comme $\phi(\mathbb{R}) = \bigcup_n \phi([-n; n])$, c'est une union de fermés d'intérieur vide. C'est donc un ensemble d'intérieur vide dans \mathbb{R}^2 . Donc $\phi(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}^2$.

4. a) Soit $X = \mathbb{R}$. Soit d la distance usuelle; (X, d) est complet.

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow]0; 1[$ un homéomorphisme. Notons $d'(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. C'est une distance sur \mathbb{R} . Pour cette distance, (\mathbb{R}, d') est isométrique à $]0; 1[$ muni de la distance usuelle. Comme ce dernier espace n'est pas complet, (\mathbb{R}, d') non plus.

b) (1) \Rightarrow (2) : on peut supposer que d' est bornée. En effet, $d_2 = \min(1, d')$ est une distance qui engendre la même topologie que d' et telle que (X, d_2) est complet.

On peut également supposer que U est dense dans X , quitte à remplacer X par \overline{U} . En effet, l'espace \overline{U} est aussi complet (c'est un fermé d'un espace complet). De plus, si U est une intersection dénombrable d'ouverts de \overline{U} , c'est aussi une intersection dénombrable d'ouverts de X .

Démonstration de l'affirmation qui précède. Si U est une intersection dénombrable d'ouverts de \overline{U} , on peut écrire $U = \bigcap_n (\overline{U} \cap V_n) = \left(\bigcap_n V_n\right) \cap \overline{U}$ avec les V_n ouverts dans X .

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \{x \in X \text{ tq } d(x, \overline{U}) < 1/n\}$. Les W_n sont ouverts et leur intersection vaut \overline{U} .

Donc $U = \left(\bigcap_n V_n\right) \cap \left(\bigcap_n W_n\right)$. C'est bien une intersection dénombrable d'ouverts de X . \square

Posons, pour tout $z \in X$, $f(z) = \sup \left\{ \limsup_n d'(x_n, x_{n+1}) \text{ tq } x \in U^{\mathbb{N}} \text{ et } x_n \rightarrow z \text{ pour } d \right\}$.

- Si $z \in U$, $f(z) = 0$ et f est continue en z pour la distance d : toute suite x d'éléments de U convergeant vers z pour d converge aussi vers z pour d' , puisque les distances d et d' engendrent la même topologie sur U . Donc x est de Cauchy pour d' et $d'(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Puisque c'est vrai pour toute suite x , $f(z) = 0$.

Montrons que f est continue en z . Soit (z_n) une suite d'éléments de X convergeant vers z . On suppose par l'absurde que $f(z_n) \not\rightarrow f(z) = 0$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f(z_n) > \epsilon$ pour tout n , pour un certain $\epsilon > 0$.

Pour tout n , soit $(x_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de U convergeant vers z_n pour d telle que $\limsup_m d'(x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)}) > \epsilon$. Soit $m(n)$ tel que :

$$d(x_{m(n)}, z_n) < \frac{1}{n+1} \quad d(x_{m(n)+1}, z_n) < \frac{1}{n+1} \quad d'(x_{m(n)}, x_{m(n)+1}) > \epsilon$$

La suite $(x_{m(1)}, x_{m(1)+1}, x_{m(2)}, x_{m(2)+1}, \dots)$ converge vers z pour la distance d . Elle converge donc aussi pour la distance d' , ce qui est absurde car elle n'est pas de Cauchy pour d' .

- Si $z \in X - U$, $f(z) > 0$ et f n'est pas continue en z : soit x une suite d'éléments de U convergeant vers z pour la distance d . Une telle suite existe car U est dense dans X . La suite x n'est pas de Cauchy pour d' , sinon sa limite serait dans U , puisque (U, d') est complet.

Puisque cette suite n'est pas de Cauchy, il existe n_0, n_1, n_2, \dots une suite strictement croissante d'entiers telle que $d'(x_{n_{2k}}, x_{n_{2k+1}}) \not\rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$. La suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers z pour d donc $f(z) \geq \limsup_n d'(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) > 0$.

Puisque U est dense dans X , il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de U convergeant vers z . Pour tout n , $f(z_n) = 0$ (puisque $z_n \in U$). Donc $f(z_n) \not\rightarrow f(z)$. Donc f n'est pas continue en z .

L'ensemble U est donc l'ensemble des points de continuité de la fonction f . D'après l'exercice 2, question 1, c'est une intersection dénombrable d'ouverts.

(2) \Rightarrow (1)

Lemme 1.2. *Si U est un ouvert de X , alors (1) est vraie.*

Démonstration. Si $U = X$, c'est évident : $d' = d$ convient.

Sinon, posons, pour tout $x \in U$, $f(x) = d(x, X - U) > 0$ et définissons, pour tous $x, x' \in U$:

$$d'(x, x') = d(x, x') + \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')} \right|$$

La fonction d' est symétrique. De plus, $d' \geq d$ donc d' est séparante. Elle vérifie l'inégalité triangulaire. C'est donc une distance.

- Les distances d et d' engendrent la même topologie sur U : d'un part, puisque $d' \geq d$, la topologie engendrée par d' est plus fine que celle engendrée par d . Montrons la réciproque. Soient $x \in U$, $\epsilon > 0$. Il faut montrer que $B_d(x, \epsilon') \subset B_{d'}(x, \epsilon)$ pour un certain $\epsilon' > 0$.

La fonction f est continue et ne s'annule pas au voisinage de x ; son inverse $1/f$ est donc également continue. Soit ϵ' suffisamment petit pour que :

$$\forall x' \in B_d(x, \epsilon'), \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')} \right| < \epsilon/2$$

Alors $B_d(x, \min(\epsilon', \epsilon/2)) \subset B_{d'}(x, \epsilon)$.

- (U, d') est complet : soit (x_n) une suite de Cauchy pour d' . Puisque $d' \geq d$, c'est aussi une suite de Cauchy pour d . Soit x_∞ sa limite pour d . Si $x_\infty \in U$, alors $x_n \rightarrow x_\infty$ pour d' puisque d et d' engendrent la même topologie sur U . Il suffit donc de montrer que $x_\infty \in U$.

Si ce n'est pas le cas, $f(x_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} d'(x_m, x_n) = +\infty$. Ce n'est pas possible, puisque la suite est de Cauchy, donc $x_\infty \in U$.

□

Supposons maintenant que $U = \bigcap_n V_n$ avec V_n ouvert dans X , pour tout n . Pour tout n , notons d'_n une distance sur V_n qui engendre la même topologie que d et rend V_n complet. Elle existe, d'après le lemme précédent.

Quitte à remplacer les d'_n par $\min(1, d'_n)$, on peut supposer que ces distances sont bornées par 1.

Posons $d' = \sum_n 2^{-n} d'_n$.

- La distance d' engendre la même topologie que d sur U . De manière générale, si, sur un espace X , les δ_n sont des distances bornées par 1 engendrant la même topologie, $\sum_n 2^{-n} \delta_n$ engendre aussi la même topologie.
- Pour la distance d' , U est complet. En effet, si x est une suite de Cauchy pour d' , c'est une suite de Cauchy pour chaque d'_n (car $d'_n \leq 2^n d'$). Elle admet donc une limite dans V_n pour chaque d'_n . Cette limite est également la limite pour d (puisque d'_n et d sont équivalentes sur V_n ; la convergence pour d'_n implique donc la convergence pour d). Toutes les limites pour les d'_n sont donc les mêmes et appartiennent donc à $\bigcap_n V_n = U$. Notons x_∞ la limite.

Puisque x converge vers x_∞ pour chaque d'_n , x converge vers x_∞ pour d' et cette suite de Cauchy a bien une limite.

Exercice 2

1. a) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$. Montrons qu'elle converge dans $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in X$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme \mathbb{R} est complet, cette suite converge vers une limite qu'on note $f_\infty(x)$.

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f_∞ . En effet :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f_\infty(x)| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \lim_{m \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{m \geq n} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &= \sup_{m \geq n} \|f_n - f_m\|_\infty \\ &\rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Ce raisonnement montre au passage que $\|f_n - f_\infty\|_\infty < +\infty$ pour tout n . Donc $\|f_\infty\|_\infty \leq \|f_0\|_\infty + \|f_0 - f_\infty\|_\infty < +\infty$ et f_∞ est bornée.

De plus, la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue donc f_∞ est continue. Ainsi, on a démontré que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait uniformément vers une fonction f_∞ , qui est continue et bornée sur X et appartient donc à $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$.

b) Il faut montrer que, pour tous $x, x' \in X$:

$$\|f_x - f_{x'}\|_\infty = d(x, x')$$

Soient donc $x, x' \in X$ quelconques et fixés.

D'une part :

$$\begin{aligned} \|f_x - f_{x'}\|_\infty &= \sup_{y \in X} |f_x(y) - f_{x'}(y)| \\ &= \sup_{y \in X} |d(y, x) - d(y, x')| \\ &\geq |d(x, x) - d(x, x')| = d(x, x') \end{aligned}$$

D'autre part, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|f_x - f_{x'}\|_\infty &= \sup_{y \in X} |d(y, x) - d(y, x')| \\ &\leq \sup_{y \in X} d(x, x') \\ &= d(x, x') \end{aligned}$$

Donc l'égalité voulue est bien vérifiée.

c) On pose $\tilde{X} = \{f_x \text{ tq } x \in X\}$, on définit \tilde{d} comme la restriction à \tilde{X} de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$ et on pose $i(x) = f_x$.

Alors \tilde{X} est complet : c'est un fermé de $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$, qui est complet.

L'ensemble $i(X)$ est dense dans \tilde{X} car un ensemble est toujours dense dans son adhérence.

L'application i réalise une isométrie sur son image : on l'a démontré à la question b).

2. Soient (\tilde{X}, \tilde{d}_X) et (\tilde{Y}, \tilde{d}_Y) deux ensembles vérifiant ces propriétés, avec les isométries i_X et i_Y . Montrons qu'ils sont isométriques.

Soit $j : i_X(X) \rightarrow \tilde{Y}$ l'application telle que $j(x) = i_Y(i_X^{-1}(x))$ pour tout $x \in i_X(X)$.

Cette application réalise une isométrie entre son espace de départ et son image (car c'est la composée de deux isométries). En particulier, elle est uniformément continue et, puisque $i_X(X)$ est dense dans \tilde{X} et \tilde{Y} est complet, elle se prolonge en une application continue de \tilde{X} vers \tilde{Y} , qu'on note toujours j .

L'application j prolongée est toujours une isométrie (car c'est une isométrie sur un sous-ensemble dense de son espace de définition). Elle est donc injective.

De plus, son image est complète. En effet, si un espace métrique est complet, tous les espaces métriques qui lui sont isométriques sont également complets ; \tilde{X} est complet donc $j(\tilde{X})$ l'est aussi. Comme $j(\tilde{X})$ est un sous-espace de \tilde{Y} , c'est un sous-espace fermé. Il contient une partie dense, $i_Y(\tilde{Y})$, donc il est égal à \tilde{Y} : j est surjective.

L'application j est donc une isométrie de \tilde{X} vers \tilde{Y} .

3. a) Cet ensemble n'est pas complet.

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue quelconque. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{P} convergeant uniformément vers f .

Cette suite est de Cauchy dans \mathcal{P} mais n'admet pas de limite dans \mathcal{P} si f n'est pas une fonction polynomiale.

L'ensemble $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ est un complété de \mathcal{P} . En effet, c'est un espace complet. L'inclusion de \mathcal{P} dans $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ est une isométrie dont l'image est dense (d'après le théorème de Weierstrass).

b) Cet ensemble est complet. En effet, soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E_0 . C'est aussi une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; elle converge donc vers une fonction g continue et bornée (puisque $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est complet).

Il faut montrer que g tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$.

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $f_n \rightarrow g$ uniformément, il existe n tel que $\|f_n - g\|_\infty < \epsilon/2$. Soit un tel n .

Puisque $f_n(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$, il existe $M > 0$ tel que, si $|x| \geq M$, alors $|f_n(x)| \leq \epsilon/2$.

Pour tout x tel que $|x| \geq M$, $|g(x)| \leq |f_n(x)| + \|f_n - g\|_\infty \leq \epsilon$.

c) Cet ensemble n'est pas complet.

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ une fonction continue telle que $\phi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$ et $\phi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$.

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant 0 pour limite en $+\infty$ et $-\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n(x) = g(x) \cdot \phi(x/n)$. C'est une fonction continue et à support compact (car $f_n(x) = 0$ si $|x| \geq 2n$).

Pour tout n , $\|f_n - g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| |1 - \phi(x/n)| \leq \sup_{|x| \geq n} |g(x)|$. Puisque $g(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$,

$\|f_n - g\|_\infty \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

La suite (f_n) est de Cauchy dans E mais ne converge pas dans E si g n'est pas à support compact.

Le complété de E est l'ensemble E_0 des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. En effet, l'injection de E dans E_0 est une isométrie et, d'après le raisonnement qu'on vient de faire, E est dense dans E_0 : toute $g \in E_0$ peut s'écrire comme la limite d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E .

De plus, E_0 est complet d'après la question précédente.

Exercice 3

1. Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de R_n convergeant vers une limite $f_\infty \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. Nous allons montrer que f_∞ appartient à R_n .

Pour tout k , soit t_k tel que, pour tout $s \in [0, 1]$:

$$|f_k(s) - f_k(t_k)| \leq n|s - t_k|$$

Quitte à considérer seulement une sous-suite, on peut supposer que $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite t_∞ .

Pour tout $s \in [0; 1]$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f_\infty(s) - f_\infty(t_\infty)| &\leq |f_\infty(s) - f_k(s)| + |f_k(s) - f_k(t_k)| + |f_k(t_k) - f_k(t_\infty)| + |f_k(t_\infty) - f_\infty(t_\infty)| \\ &\leq 2\|f_\infty - f_k\|_\infty + |f_k(s) - f_k(t_k)| + |f_k(t_k) - f_k(t_\infty)| \\ &\leq 2\|f_\infty - f_k\|_\infty + n|s - t_k| + n|t_k - t_\infty| \end{aligned}$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient :

$$|f_\infty(s) - f_\infty(t_\infty)| \leq n|s - t_\infty|$$

Donc $f_\infty \in R_n$.

2. Soient $f \in R_n$ et $\epsilon > 0$. Montrons que $\overline{B}(f, \epsilon) \not\subset R_n$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note g_m la fonction qui est affine sur chaque intervalle de la forme $\left[\frac{k}{2m}; \frac{k+1}{2m}\right]$ avec $k \in \{0, \dots, 2m-1\}$ et telle que, pour tout k :

$$\begin{aligned} g_m\left(\frac{2k}{2m}\right) &= 1 \\ g_m\left(\frac{2k+1}{2m}\right) &= -1 \end{aligned}$$

La fonction f est uniformément continue. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$(|s - s'| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad (|f(s) - f(s')| < \epsilon)$$

Soit m tel que $1/m \leq \min(2\alpha, \epsilon/2n)$. Notons $h = f + \epsilon g_m$. C'est un élément de $\overline{B}(f, \epsilon)$. Montrons que $h \notin R_n$.

Si h appartient à R_n , il existe un segment $I \subset [0; 1]$ de longueur $\epsilon/2n$ tel que :

$$\forall s, s' \in I, \quad |h(s) - h(s')| \leq \epsilon$$

En effet, il suffit de prendre $I = [t; t + \epsilon/2n]$ ou $I = [t - \epsilon/2n; t]$ avec t comme dans la définition de R_n . Avec l'une de ces définitions, on a, pour tous $s, s' \in I$:

$$\begin{aligned} |h(s) - h(s')| &\leq |h(s) - h(t)| + |h(t) - h(s')| \\ &\leq n(|s - t| + |s' - t|) \\ &\leq 2n \frac{\epsilon}{2n} = \epsilon \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{m} \leq \frac{\epsilon}{2n}$, il existe k tel que $\frac{k}{2m} \in I$ et $\frac{k+1}{2m} \in I$. On a alors :

$$\begin{aligned} \epsilon &\geq \left| h\left(\frac{k}{2m}\right) - h\left(\frac{k+1}{2m}\right) \right| \\ &\geq \left| \epsilon g_m\left(\frac{k}{2m}\right) - \epsilon g_m\left(\frac{k+1}{2m}\right) \right| - \left| f\left(\frac{k}{2m}\right) - f\left(\frac{k+1}{2m}\right) \right| \\ &= 2\epsilon - \left| f\left(\frac{k}{2m}\right) - f\left(\frac{k+1}{2m}\right) \right| \end{aligned}$$

Donc $\left| f\left(\frac{k}{2m}\right) - f\left(\frac{k+1}{2m}\right) \right| \geq \epsilon$. C'est impossible car $\frac{1}{2m} \leq \alpha$.

3. Si $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue dérivable en un point t , alors f appartient à R_n pour un certain n .

En effet, la fonction $s \rightarrow \left| \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right|$ est continue sur $[0; 1]$ si on la prolonge en t par $f'(t)$. Elle est donc bornée par un certain entier n . Par définition de R_n , on a $f \in R_n$ pour cette valeur de n .

Or $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$ est une union dénombrable de fermés d'intérieur vide. D'après le théorème de Baire, cet ensemble est également d'intérieur vide. Son complémentaire dans $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ est donc non-vide et toute fonction de son complémentaire n'est dérivable en aucun point.

Exercice 4

1. Montrons que E_n est ouvert. Si $x \in E_n$, il existe \mathcal{V} un voisinage de x tel que, pour tous $x', x'' \in \mathcal{V}$, $d(f(x'), f(x'')) < 1/n$. Quitte à prendre \mathcal{V} un peu plus petit, on peut supposer que \mathcal{V} est ouvert. Alors $\mathcal{V} \subset E_n$: pour tout $y \in \mathcal{V}$, \mathcal{V} est un voisinage de y vérifiant la propriété voulue.

Montrons que f est continue en x si et seulement si $x \in \bigcap_n E_n$.

- Si f est continue en x : pour tout n , il existe \mathcal{V} un voisinage de x tel que, pour tout $x' \in \mathcal{V}$, $d(f(x), f(x')) < 1/2n$. Alors, pour tous $x', x'' \in \mathcal{V}$, $d(f(x'), f(x'')) \leq d(f(x'), f(x)) + d(f(x), f(x'')) < 1/n$. Donc $x \in E_n$.
- Si $x \in \bigcap_n E_n$: soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soit n tel que $1/n < \epsilon$. Comme $x \in E_n$, il existe \mathcal{V} tel que, pour tout $x' \in \mathcal{V}$, $d(f(x), f(x')) < 1/n < \epsilon$.

2. a) Si $x \in \mathbb{Q}$, f n'est pas continue en x . En effet, puisque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} , il existe (x_n) une suite d'irrationnels convergeant vers x . Alors $f(x_n) \rightarrow 0 \neq f(x)$.

Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, f est continue en x . En effet, soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soit q tel que $\frac{1}{q} < \epsilon$. Posons :

$$E = \left\{ \frac{p}{q'} \text{ tq } q' \in \{1, \dots, q-1\} \text{ et } p \in \mathbb{Z} \right\}$$

Cet ensemble est fermé et ne contient pas x . Soit $\eta < d(x, E)$. Pour tout $y \in]x - \eta; x + \eta[$, puisque $y \notin E$, $f(y) \leq 1/q < \epsilon$.

b) D'après la question 1., si c'est le cas, \mathbb{Q} peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{Q} = \bigcap_n E_n$$

avec les E_n ouverts. Tous les E_n sont denses car ils contiennent \mathbb{Q} .

D'après le théorème de Baire, puisque \mathbb{R} est complet pour la topologie usuelle, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense donc non-vide. Pourtant, on devrait avoir :

$$\emptyset = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{Q} + \pi) = \left(\bigcap_n E_n \right) \cap \left(\bigcap_n (E_n + \pi) \right)$$

Les E_n et $E_n + \pi$ étant justement des ouverts denses, c'est impossible.

3. a) La fonction $h = 3/4 + 1_{\mathbb{Q}}/4$ convient (où $1_{\mathbb{Q}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des rationnels).

b) Soit d'abord $x \in \bigcap_n E_n$. Montrons que f est continue en x . Soit x_n une suite d'éléments de X convergeant vers x .

Pour tout M , $\bigcap_{m \leq M} E_m$ est un voisinage ouvert de x . Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, $x_n \in \bigcap_{m \leq M} E_m$, ce qui implique $N(x_n) > M$.

Donc $(N(x_n))$ tend vers $+\infty$. Puisque h est une fonction bornée, $f(x_n) \rightarrow 0 = f(x)$.

Soit maintenant x un point de continuité de f . Montrons que $x \in \bigcap_n E_n$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $N(x) < +\infty$.

Puisque $f(x) \in [\frac{3}{4}2^{-N(x)}; 2^{-N(x)}]$ et f est continue en x , il existe U un voisinage ouvert de x tel que :

$$\forall y \in U, f(y) \in \left[\frac{5}{8}2^{-N(x)}; \frac{5}{4}2^{-N(x)} \right]$$

Pour tout y , si $N(y) > N(x)$, $f(y) \leq 2^{-N(x)-1} < \frac{5}{8}2^{-N(x)}$. D'autre part, si $N(y) < N(x)$, $f(y) \geq \frac{3}{4}2^{-N(x)+1} > \frac{5}{4}2^{-N(x)}$.

Le fait que $f(y) \in [\frac{5}{8}2^{-N(x)}; \frac{5}{4}2^{-N(x)}]$ implique donc que $N(y) = N(x)$. La fonction N est donc constante sur U .

La fonction h est discontinue en x . Soit donc $\epsilon > 0$ tel que, pour tout voisinage V de x , il existe $x' \in V$ tel que $|h(x) - h(x')| > \epsilon$.

Si V est un voisinage de x , $V \cap U$ aussi, puisque U est un voisinage de X . Il existe donc $x' \in V \cap U$ tel que $|h(x) - h(x')| > \epsilon$. On a alors $x' \in V$ et $|f(x) - f(x')| = 2^{-N(x)}|h(x) - h(x')| > \epsilon 2^{-N(x)}$.

La fonction f n'est donc pas continue en x . C'est absurde.

Exercice 5

1. Montrons d'abord que E est connexe.

L'ensemble $E - \{(0, 0)\}$ est connexe par arcs. En effet, on peut vérifier que tout point de cet ensemble se relie par un chemin continu à $(0, 1)$: pour un point de la forme $(x, 1)$, le chemin $\phi : t \rightarrow ((1-t)x, 1)$ convient et pour un point de la forme $(1/n, y)$, on le relie d'abord à $(1/n, 1)$ puis à $(0, 1)$ comme précédemment.

L'ensemble $E - \{(0, 0)\}$ est donc en particulier connexe.

Supposons maintenant que $E = U \cup V$ avec U et V deux fermés disjoints de E . Il faut montrer que U ou V est vide.

Comme $E - \{(0, 0)\}$ est connexe, cet ensemble est inclus dans U ou dans V . Par symétrie, on peut supposer qu'il est inclus dans U .

Tout voisinage de $(0, 0)$ contient nécessairement un point de la forme $(1/n, 0)$. Puisque les points de la forme $(1/n, 0)$ appartiennent à U , cela signifie que tout voisinage de $(0, 0)$ intersecte U .

Comme U est fermé, $(0, 0) \in U$.

Donc $U = E$ et $V = \emptyset$.

Montrons maintenant que E n'est pas connexe par arcs.

Nous allons montrer qu'il n'existe pas de chemin continu dans E reliant les points $(0, 0)$ et $(0, 1)$. Supposons par l'absurde qu'un tel chemin $\phi : [0; 1] \rightarrow E$ existe.

Soit $t_0 = \inf \{t \in [0; 1] \text{ tq } \phi(t)_2 = 1\}$ (où $\phi(t)_2$ désigne la deuxième coordonnée de $\phi(t)$). Ce réel t_0 est bien défini car $\phi(1)_2 = 1$ et il est strictement positif car $\phi(0)_2 = 0 < 1$ et ϕ est continue.

L'application $f : t \in [0; t_0[\rightarrow \phi(t)_1$ est à images dans $\{0\} \cup \{1/n \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*\}$. En effet, pour tout $t < t_0$, $\phi(t)_2 \neq 1$ donc, puisque $\phi(t) \in E$, $\phi(t)_1$ vaut 0 ou $1/n$ pour un certain n .

L'ensemble $[0; t_0[$ est connexe et l'image d'un ensemble connexe par une application continue est également connexe. Comme les composantes connexes de $\{0\} \cup \{1/n \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*\}$ sont les singletons, l'image de f est réduite à un point, ce qui signifie que f est constante.

Puisque f est continue, la valeur en laquelle elle est constante vaut $f(0) = 0$. Donc, pour tout $t \in [0; t_0[$, $\phi(t) = (0, 0)$. On a donc aussi $\phi(t_0) = (0, 0)$, ce qui est (à cause de la continuité de ϕ) contradictoire avec la définition de t_0 .

2. Pour la connexité par arcs, il suffit de voir que tout élément (x, rx) de E est relié à $(0, 0)$ par un chemin continu (par exemple $\phi : t \in [0; 1] \rightarrow ((1-t)x, (1-t)rx)$).

Montrons maintenant que E n'est pas localement connexe (comme tout connexe par arcs est connexe, cela impliquera que E n'est pas localement connexe par arcs).

Montrons par exemple qu'aucun voisinage de $(1, 0)$ dans E ne contenant pas $(0, 0)$ n'est connexe. Soit V un tel voisinage.

L'ensemble V contient tous les points de la forme $(1, r)$ pour tout r rationnel assez proche de 0. Soit $R \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}$ tel qu'il existe $r > R$ pour lequel $(1, r) \in V$.

Notons $V_1 = \{(x, y) \in V \text{ tq } y > Rx\}$ et $V_2 = \{(x, y) \in V \text{ tq } y < Rx\}$.

Ces ensembles sont ouverts dans V : ce sont les intersections de V avec deux ouverts de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. De plus, ils sont tous deux non-vides : le premier contient $(1, r)$ pour le $r > R$ précédemment évoqué et le deuxième contient $(1, 0)$.

Ils forment une partition de V : si $(x, y) \in V$, on doit avoir (à cause de la définition de E) $y/x \in \mathbb{Q}$. On ne peut donc pas avoir $y = Rx$ et on a nécessairement $y > Rx$ ou $y < Rx$.

Donc V n'est pas connexe.

3. a) Remarquons d'abord que $x\mathcal{R}y$ implique $x\mathcal{S}y$, même lorsque X n'est pas localement connexe. En effet, si x et y appartiennent à la même composante connexe F , toute fonction $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ continue est constante sur F , puisque F est connexe donc $f(x) = f(y)$.

Il faut donc montrer que, si X est localement connexe, $\neg(x\mathcal{R}y) \Rightarrow \neg(x\mathcal{S}y)$. Soient donc x et y appartenant à deux composantes connexes différentes. Soit F la composante connexe de x . C'est un fermé (les composantes connexes sont toujours fermées) et c'est aussi un ouvert (puisque X est localement connexe). L'application $1_F : X \rightarrow \{0, 1\}$ est donc continue. Puisque $1_F(x) = 1 \neq 0 = 1_F(y)$, on n'a pas $x\mathcal{S}y$.

b) Pour la relation \mathcal{R} , la classe d'équivalence de $(0, 0)$ est le singleton $\{(0, 0)\}$. En effet, notons F la classe d'équivalence du point.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F \cap \{(x, y) \text{ tq } x \leq 1/(n+1)\}$ et $F \cap \{(x, y) \text{ tq } x \geq 1/n\}$ est une partition de F en deux fermés disjoints. L'un des deux fermés est vide ; c'est nécessairement le deuxième car le premier contient $(0, 0)$.

On déduit de ce raisonnement que, pour tout $(x, y) \in F$, on doit avoir $x = 0$. On a donc $F = \{(0, 0)\}$ ou $F = \{(0, 0), (0, 1)\}$. Comme F est connexe, $F = \{(0, 0)\}$.

Pour la relation \mathcal{S} , la classe d'équivalence de $(0, 0)$ est $\{(0, 0), (0, 1)\}$. En effet, notons-la G .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $\phi : E \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $\phi(x, y) = 0$ si $x < 1/n$ et $\phi(x, y) = 1$ si $x \geq 1/n$ est continue sur E . On en déduit que, si $(x, y) \in E$ avec $x \geq 1/n$, alors on n'a pas $(x, y)\mathcal{S}(0, 0)$.

On doit donc avoir $G \subset \{(0, 0), (0, 1)\}$. Il suffit pour conclure de montrer que $(0, 0)\mathcal{S}(0, 1)$.

Soit $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction continue quelconque. Par continuité de f en $(0, 0)$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $f(1/n, 0) = f(0, 0)$. Puisque $\{(1/n, y) \text{ tq } y \in \mathbb{R}\}$ est connexe pour tout n , l'application f est constante sur chacun de ces ensembles. Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq N$, $f(1/n, y) = f(0, 0)$. En particulier, pour tout $n \geq N$, $f(1/n, 1) = f(0, 0)$. Par continuité de f , $f(0, 1) = f(0, 0)$.

Exercice 6

1. Tout ouvert U de X est connexe. En effet, si $U = U_1 \cup U_2$ avec U_1 et U_2 deux ouverts

disjoints de U , alors U_1 et U_2 sont des ouverts de X . Ils sont d'intersection vide donc l'un des deux est vide (deux ouverts non-vides de la topologie cofinie sur un ensemble infini sont toujours d'intersection non-vide).

En particulier, X est connexe.

N'importe quel voisinage ouvert de n'importe quel point de X est connexe donc X est localement connexe.

2. a) $G = [0; 1] - (\bigcup_n \overset{\circ}{F}_n)$

Donc G est le complémentaire d'un ouvert.

b) G est fermé dans $[0; 1]$ qui est complet. Donc G est complet. Supposons G non-vide.

Puisque G est une union dénombrable de fermés et puisque G n'est pas d'intérieur vide dans lui-même, il existe n tel que ∂F_n n'est pas d'intérieur vide dans G . Soit $x_0 \in \partial F_n$ un point de l'intérieur.

Par définition de l'intérieur, il existe un voisinage de x_0 dans G qui est inclus dans ∂F_n . Il existe donc $a < b$ des réels tels que $x_0 \in]a; b[\cap G \subset \partial F_n \subset F_n$.

c) Supposons que G est non-vide et soient a, b, n comme à la question précédente.

Pour tout $m \neq n$, $]a; b[\cap F_m = \emptyset$. En effet, $]a; b[\cap F_m$ est un fermé de $]a; b[\cap [0; 1]$ qui n'est pas égal à $]a; b[\cap [0; 1]$ tout entier (puisque $]a; b[$ intersecte F_n qui est disjoint de F_m). De plus, le bord de ce fermé dans $]a; b[\cap [0; 1]$ vaut $]a; b[\cap \partial F_m = \emptyset$. Donc ce fermé est égal à son intérieur : il est à la fois fermé et ouvert. Comme $]a; b[\cap [0; 1]$ est connexe et n'est pas inclus dans F_m , cela implique que $]a; b[\cap F_m = \emptyset$.

Donc, puisque $]a; b[\cap [0; 1] = \bigcup_m (F_m \cap]a; b[)$, on doit avoir $]a; b[\cap [0; 1] \subset F_n$. Mais alors $]a; b[\cap \partial F_n = \emptyset$, ce qui est en contradiction avec la définition de a, b, n .

C'est absurde.

Pour tout n , on a donc $\partial F_n = \emptyset$. Puisque $[0; 1]$ est connexe, cela implique $F_n = \emptyset$ ou $F_n = [0; 1]$. D'où le résultat.

d) D'après ce qu'on vient de voir, toutes les applications continues de $[0; 1]$ dans X sont constantes. En effet, si $\phi : [0; 1] \rightarrow X$ est continue, $\{\phi^{-1}(x)\}_{x \in X}$ forme une partition dénombrable de $[0; 1]$ en fermés disjoints. Tous les éléments de cette partition doivent donc être vides sauf un.

Donc X n'est pas connexe par arcs.

3. Soient a, b quelconques. S'il existe une injection de \mathbb{R} dans X , il existe aussi une injection de $\phi :]0; 1[\rightarrow X$. On pose $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$.

L'application ϕ est continue car l'antécédant par ϕ de tout fermé de X (c'est-à-dire de tout ensemble fini) est un ensemble fini donc un fermé de $]0; 1[$.

Exercice 7

1. Puisque $K \subset U \cup V$, $K \cap (K_0 - (U \cup V)) = \emptyset$. Or $K \cap (K_0 - (U \cup V)) = \bigcap_n (K_n \cap (K_0 - (U \cup V)))$.

Tous les ensembles $K_n \cap (K_0 - (U \cup V))$ sont compacts (il s'agit de fermés inclus dans des compacts). Puisque leur intersection est vide, il existe n tel que $K_n \cap (K_0 - (U \cup V)) = \emptyset$. Pour ce n , on a alors $K_n \subset U \cup V$ donc $K_n = (U \cap K_n) \cup (V \cap K_n)$. Puisque $U \cap K_n, V \cap K_n$ est une partition de K_n en ouverts disjoints et puisque K_n est connexe, $U \cap K_n = \emptyset$ ou $V \cap K_n = \emptyset$. Puisque $K \subset K_n$, $U \cap K = \emptyset$ ou $V \cap K = \emptyset$.

Cela implique $K \subset U$ ou $K \subset V$.

2. Soient F_1, F_2 deux fermés disjoints de K tels que $F_1 \cup F_2 = K$. Les ensembles F_1 et F_2 sont des fermés de K_0 . Puisque K_0 est compact, K_0 est normal (voir le TD précédent). Il existe donc U, V deux ouverts disjoints de K_0 tels que $F_1 \subset U$ et $F_2 \subset V$.

Les ouverts U, V recouvrent K donc, d'après la première question, $K \subset U$ ou $K \subset V$. On a donc $K = F_1$ ou $K = F_2$.