École Normale Supérieure
23 octobre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

# Feuille d'exercices n$^o$5

**Exercice 1 : sur le théorème de Stone-Weierstrass**

1. Soit $X$ un espace topologique. On suppose qu'il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles compacts de $X$ tels que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et tels que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout $n$.
Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, séparant les points et contenant les fonctions constantes. Montrer que, pour toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ convergeant uniformément vers $f$ sur tout compact.

2. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques compacts. On note $Y = \prod_i X_i$ muni de la topologie produit.
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues de $Y \to \mathbb{R}$ ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme $f : (x_i)_{i\in I} \to g((x_i)_{i\in E})$ avec $E$ un sous-ensemble fini de $I$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$.

3. Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{C}$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$.

4. Soit $X$ compact. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ qui sépare les points de $X$. Montrer que, si $\mathcal{A}$ ne contient pas de fonction constante non-nulle, il existe $x_0 \in X$ tel que :

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \text{ tq } f(x_0) = 0\}$$

**Exercice 2 : séparabilité d'espaces de fonctions**

1. Soit $X$ un espace métrique compact. Montrer que $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est séparable.

2. On note $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui sont à support compact et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour tout $K \subset \mathbb{R}^2$ compact, pour tout $n \geq 0$ et pour toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, on note :

$$||f||_{K,n} = \sup_{x\in K} \sup_{k_1+k_2\leq n} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2} f}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2}(x) \right|$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on note $B_{K,n}(f, \epsilon) = \{g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2) \text{ tq } ||g - f||_{K,n} < \epsilon\}$.
a) Montrer que la famille $\{B_{K,n}(f, \epsilon)\}_{K,n,f,\epsilon}$ est une base d'ouverts de la topologie qu'elle engendre.
b) À quelle condition une suite d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ converge-t-elle pour cette topologie ?
c) Montrer que cette topologie est séparable.

**Exercice 3 : distance de Hausdorff**
Soit $(X, d)$ un espace métrique compact. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées non vides de $X$. Pour toute $A \in \mathcal{F}$, on pose :

$$\begin{aligned} \phi_A : & X \to \mathbb{R} \\ & x \to d(x, A) \end{aligned}$$

Pour toutes $A, B \in \mathcal{F}$, on note $\delta(A, B) = ||\phi_A - \phi_B||_\infty$. La fonction $\delta$ est une distance sur $\mathcal{F}$, appelée distance de Hausdorff (voir TD 1).

1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $(\phi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $X$ vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ continue, lorsque $n \to +\infty$.
Soit $A = f^{-1}(\{0\})$.
a) Soit $x \in X$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A_n$ tel que $\phi_{A_n}(x) = d(x, a_n)$. En déduire qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) = f(x)$. (Cela montre en particulier que $A \neq \emptyset$.)
b) Montrer que $f$ est 1-lipschitzienne et en déduire que $f \leq \phi_A$.
c) Montrer que $f = \phi_A$.

2. À l'aide du théorème d'Ascoli, montrer que $(\mathcal{F}, \delta)$ est compact.

**Exercice 4 : théorème de Peano**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On note $|.|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
Soient $\eta, R > 0$ et $U = [0; \eta] \times \overline{B}(x_0, R) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Soit $M > 0$ une borne de $|f|$ sur $U$.
On va démontrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que le problème

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X(t)) \qquad X(0) = x_0$$

admet une solution $X \in \mathcal{C}^1([0; \epsilon], \mathbb{R}^n)$.

1. Soit $\epsilon = \min(\eta, R/M)$. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, il existe une fonction continue $X_\delta : [0; \epsilon] \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que :
   - $X_\delta(0) = x_0$
   - $\forall t \in [0; \epsilon]$, si $X_\delta$ est dérivable en $t$, alors $|\frac{dX_\delta}{dt}(t) - f(t, X_\delta(t))| \leq \delta$.

[Indication : utiliser la « méthode d'Euler ».]

2. Montrer qu'il existe une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $(X_{\delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément dans $\mathcal{C}^0([0; \epsilon], \mathbb{R}^n)$ vers une fonction $X : [0; \epsilon] \to \mathbb{R}^n$.

3. Montrer que $X$ est une solution de l'équation.

**Exercice 5**
Soit $E$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles en-dehors de l'intervalle $[0; 1]$ et soit $F \subset E$ l'espace des fonctions de $E$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$. On munit $E$ de la norme uniforme, notée $||.||_\infty$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit l'application $D^k : F \to E$ qui à une fonction associe sa dérivée $k$-ième. On munit $F$ de la topologie engendrée par les ouverts de la forme $\{f \in F \text{ tq } ||D^k f - g||_\infty < \epsilon\}$, avec $k \in \mathbb{N}, g \in E$ et $\epsilon > 0$.

On admettra sans le redémontrer que $F$ contient des fonctions non-nulles.

1. Montrer que $F$ est de dimension infinie.

2. Montrer que $F$ est métrisable et que $f_n \to f$ si et seulement si $||D^k(f_n) - D^k(f)||_\infty \to 0$ pour tout $k$.

3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $F$ si et seulement si chacune des suites $D^k(f_n)$ converge dans $E$.

4. Montrer qu'une partie $K$ de $F$ est relativement compacte si et seulement si $D^k(K)$ est relativement compacte dans $E$ pour tout $k$.

5. Soit $B \subset F$ une partie telle que $\sup\limits_{f\in B}||D^k(f)||_\infty < \infty$ pour tout $k$. Montrer que $B$ est relativement compacte.

6. Montrer que la topologie de $F$ ne peut pas être engendrée par une norme.

**Exercice 6 : forme générale du théorème de Hahn-Banach**

Soient $E$ un espace vectoriel et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Soient $p : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et $l : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $l(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$.
Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une forme linéaire $\tilde{l} : E \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec $l$ sur $F$ et telle que $\tilde{l}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

On admet le lemme de Zorn, équivalent à l'axiome du choix : tout ensemble partiellement ordonné inductif admet un élément maximal.
(On dit qu'un ensemble partiellement ordonné $(A, \leq)$ est inductif si, pour toute famille $(a_i)_{i\in I}$ totalement ordonnée d'éléments de $A$, il existe un $\alpha \in A$ tel que $a_i \leq \alpha$ pour tout $i \in I$.)

1. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $F'$ de $E$ et une forme linéaire $l' : F' \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

   1. $F \subset F'$ et $l'$ coïncide avec $l$ sur $F$.
   2. $l'(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F'$.
   3. Si $(F'', l'')$ vérifie aussi les propriétés 1. et 2., $F'$ n'est pas strictement inclus dans $F''$ ou bien $l'$ et $l''$ ne coïncident pas sur $F'$.

2. a) Dans cette question, on suppose que $F'$ et $l'$ vérifient les propriétés de la question précédente et que $F' \neq E$. Soit $a \in E - F'$.
Montrer qu'il existe une forme linéaire $l''$ telle que $(F' \oplus \mathbb{R}a, l'')$ vérifie les propriétés 1. et 2. de la question précédente.
b) Conclure.

3. [Applications]
a) Déduire de ce résultat le théorème que vous avez vu en cours.
b) Montrer que si $E$ est un espace vectoriel normé et $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $H$ est dense dans $E$ si et seulement si toute forme linéaire continue identiquement nulle sur $H$ est aussi identiquement nulle sur $E$.
c) Soient $E$ un espace vectoriel et $C$ un sous-ensemble convexe de $E$. Soit $x \in E - C$. Montrer qu'il existe une forme linéaire non-nulle $l : E \to \mathbb{R}$ et un réel $a$ tel que $l(x) = a$ et $l(y) \leq a$ pour tout $y \in C$.