École Normale Supérieure
23 octobre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n°5

Corrigé

Exercice 1

1. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Construisons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ demandée.
Pour tout n, on note $\mathcal{A}_n = \{g_{|K_n} \text{ tq } g \in \mathcal{A}\}$.
Pour tout n, $\mathcal{A}_n$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K_n, \mathbb{R})$ contenant les constantes et séparant les points. Elle est donc dense dans $\mathcal{C}(K_n, \mathbb{R})$. Soit $f_n \in \mathcal{A}$ telle que $||f_{n|K_n} - f_{|K_n}|| \leq \frac{1}{n+1}$.
Montrons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers f uniformément sur tout compact.
Si $S \subset X$ est compact, alors $S \subset K_n$ pour tout n assez grand. En effet, les $\mathring{K}_n$ forment un recouvrement ouvert de S (car $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathring{K}_{n+1} \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathring{K}_n$). Puisque S est compact, on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini. Comme les $\mathring{K}_n$ sont emboîtés, cela revient à dire que $S \subset \mathring{K}_n$ pour tout n assez grand.
Donc, pour tout n assez grand, $||f_{n|S} - f_{|S}|| \leq ||f_{n|K_n} - f_{|K_n}|| \leq \frac{1}{n+1}$. Donc $||f_{n|S} - f_{|S}|| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

2. L'ensemble de ces fonctions est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$. Cette sous-algèbre contient les fonctions constantes.
Elle sépare les points. En effet, si $(y_i)_{i\in I}$ et $(z_i)_{i\in I}$ sont deux points différents, il existe $i_0 \in I$ tel que $y_{i_0} \neq z_{i_0}$. Comme X_{i_0} est compact, il est normal et vérifie donc le lemme d'Urysohn (voir les TD 2 et 3). Il existe alors $g : X_{i_0} \to \mathbb{R}$ continue telle que $g(y_{i_0}) = 0 \neq 1 = g(z_{i_0})$. La fonction $f : (x_i)_{i\in I} \to g(x_{i_0})$ appartient à $\mathcal{F}$ et sépare $(y_i)_i$ et $(z_i)_i$.
De plus, par le théorème de Tychonov, $\prod\limits_i X_i$ est compact.
Par le théorème de Stone-Weierstrass, $\mathcal{F}$ est donc dense dans $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$.

3. Soit $x_0 \in \Omega$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$. Notons $\phi : [0; 1] \to \Omega$ l'application telle que $\phi(t) = x_0 + re^{2\pi i t}$.
Pour tout $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi^k(t)\phi'(t)dt &= \frac{1}{k+1}\int_0^1 [\phi^{(k+1)}]'(t)dt \\
&= \frac{\phi^{(k+1)}(1) - \phi^{(k+1)}(0)}{k+1} = 0
\end{aligned}$$

On en déduit que pour toute fonction polynomiale f, $\int_0^1 f(\phi(t))\phi'(t)dt = 0$.
Si l'ensemble des fonctions polynomiales de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{C}$ était dense dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$, toutes les fonctions continues de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{C}$ devraient vérifier :

$$\int_0^1 f(\phi(t))\phi'(t)dt = 0$$

Or ce n'est pas le cas. En effet, si on prend $f(z) = \overline{z}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\phi(t))\phi'(t)dt &= \int_0^1 2\pi i r(x_0 e^{2\pi i t} + r)dt \\ &= 2\pi i r^2 \neq 0\end{aligned}$$

4.

Lemme 1.1. *Pour toute $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, il existe un unique réel $c(h)$ tel que $h - c(h) \in \mathcal{A}$.*

Démonstration. Commençons pas l'unicité : si $h - c_1 \in \mathcal{A}$ et $h - c_2 \in \mathcal{A}$, alors $c_2 - c_1 = (h - c_1) - (h - c_2)$ appartient aussi à $\mathcal{A}$. La seule fonction constante dans $\mathcal{A}$ étant la fonction nulle, on doit avoir $c_2 - c_1 = 0$.
Montrons l'existence.
Posons $\mathcal{A}' = \{f + c \text{ tq } f \in \mathcal{A}, c \in \mathbb{R}\}$. On vérifie qu'il s'agit d'une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Cette sous-algèbre contient les constantes et sépare les points. Elle est donc dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Ainsi, pour toute fonction $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ et une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que :

$$||h - (f_n + c_n)||_\infty \to 0$$

La suite $(|c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$. En effet, si elle tend vers $+\infty$, on a :

$$||f_n/c_n + (1 - h/c_n)||_\infty \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad ||f_n/c_n + 1||_\infty \to 0$$

Pour tout n, $f_n/c_n \in \mathcal{A}$ donc $1 \in \overline{\mathcal{A}}$. Comme on a supposé que $\mathcal{A}$ était fermée, cela implique que $1 \in \mathcal{A}$, ce qui est absurde.
Donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $c(h)$. Alors :

$$||h - c(h) - f_n||_\infty \to 0$$

et comme $\mathcal{A}$ est fermée, $h - c(h) \in \mathcal{A}$. □

Lemme 1.2. *L'application $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \to c(h) \in \mathbb{R}$ est un morphisme d'algèbres.*

Démonstration. Soient $h_1, h_2 \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $r \in \mathbb{R}$. Puisque $h_1 - c(h_1)$ appartient à $\mathcal{A}$, $rh_1 - rc(h_1)$ aussi. Comme $c(rh_1)$ est unique, $c(rh_1) = rc(h_1)$.
De même, $c(h_1 + h_2) = c(h_1) + c(h_2)$.
Enfin, puisque $h_1 - c(h_1)$ et $h_2 - c(h_2)$ appartiennent à $\mathcal{A}$, $(h_1 - c(h_1))(h_2 - c(h_2)) + c(h_1)(h_2 - c(h_2)) + c(h_2)(h_1 - c(h_1))$ aussi. Donc $h_1 h_2 - c(h_1)c(h_2)$ appartient à $\mathcal{A}$ et $c(h_1 h_2) = c(h_1)c(h_2)$. □

Lemme 1.3. *Pour tout $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $|c(h)| \leq ||h||_\infty$.*

Démonstration. Montrons d'abord qu'il existe $M > 0$ tel que $|c(h)| \leq M||h||_\infty$ pour toute $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
Si ce n'est pas le cas, on peut trouver une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions telles que $||h_n||_\infty \to 0$ et $c(h_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec cette définition, $1 - h_n \in \mathcal{A}$ pour tout n. Comme $\mathcal{A}$ est fermée, $1 \in \mathcal{A}$. C'est impossible.

Donc M existe bien.
Montrons maintenant que $M = 1$ convient. Si ce n'est pas le cas, il existe $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que $|c(f)| > ||f||_\infty$. Alors :

$$\left| \frac{c(f^n)}{||f^n||_\infty} \right| = \left| \frac{c(f)}{||f||_\infty} \right|^n \to +\infty$$

ce qui est absurde car ce quotient doit rester inférieur à M. □

Lemme 1.4. *Il n'existe pas dans $\mathcal{A}$ de fonction strictement positive.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{A}$. Notons $m_1 = \min f$ et $m_2 = \max f$ (ces réels sont bien définis car la fonction f est continue et définie sur un compact).
Posons $h = f - \frac{m_1+m_2}{2}$. Le minimum de h est $\frac{m_1-m_2}{2}$ et son maximum est $\frac{m_2-m_1}{2}$ donc $||h||_\infty = \frac{m_2-m_1}{2}$.
Puisque $f \in \mathcal{A}$, $c(h) = -\frac{m_1+m_2}{2}$. D'après le lemme précédent :

$$\left| \frac{m_1 + m_2}{2} \right| \leq \frac{m_2 - m_1}{2}$$

donc $m_1 \leq 0$ et $m_2 \geq 0$, ce qui implique que f n'est pas strictement positive. □

Utilisons le lemme précédent pour conclure.
Posons $F = \bigcap_{f \in \mathcal{A}} f^{-1}(\{0\})$. Cet ensemble est une intersection de fermés du compact X. Il est non-vide car, s'il est vide, il existe $f_1, ..., f_n$ un nombre fini d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $f_1^{-1}(\{0\}) \cap ... \cap f_n^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. Dans ce cas, les fonctions f_k n'ont pas de zéro commun donc la fonction $g = f_1^2 + ... + f_n^2$ est un élément de $\mathcal{A}$ n'ayant que des valeurs strictement positives. C'est en contradiction avec le lemme précédent.
L'ensemble F ne peut contenir qu'un seul point, sinon $\mathcal{A}$ ne sépare pas les points de F (toutes les fonctions de $\mathcal{A}$ étant nulles sur F). Il existe donc un unique $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = 0$ pour toute $f \in \mathcal{A}$.
On a donc montré $\mathcal{A} \subset \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \text{ tq } f(x_0) = 0\}$.
De plus, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que $f(x_0) = 0$, on doit avoir $c(f) = 0$. En effet, puisque $f - c(f) \in \mathcal{A}$, on doit avoir $(f - c(f))(x_0) = 0$ donc $c(f) = 0$. Ainsi, $f \in \mathcal{A}$.

Exercice 2

1. Un espace métrique compact est séparable. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_1^{(k)}, ..., x_{s_k}^{(k)}$ des éléments de X tels que $X \subset \bigcup_{t \leq s_k} B(x_t^{(k)}, 2^{-k})$. L'ensemble de tous les $x_t^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \leq s_k$ est dénombrable et dense dans X.
Notons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dénombrable dense dans X.
Pour tous n, m, k tels que $2^{-k} < d(x_n, x_m)/2$, soit $g_{n,m,k}$ une fonction valant 1 sur $\overline{B}(x_n, 2^{-k})$ et 0 sur $\overline{B}(x_m, 2^{-k})$. Une telle fonction existe car X vérifie le lemme d'Urysohn (il est compact donc normal ; voir les TD 2 et 3).
Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par les constantes et les fonctions $g_{n,m,k}$. Cette algèbre est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. En effet, elle contient les constantes et, d'après la définition des $g_{n,m,k}$, elle sépare

les points : si y, z sont deux points distincts de X, il existe x_n, x_m, k tels que $y \in \overline{B}(x_n, 2^{-k})$, $z \in \overline{B}(x_m, 2^{-k})$ et $2^{-k} < d(x_n, x_m)/2$. Pour de tels x_n, x_m, k, on a $g_{n,m,k}(y) = 1$ et $g_{n,m,k}(z) = 0$. De plus, $\mathcal{A}$ contient un sous-ensemble dénombrable dense : l'ensemble des sommes finies de constantes rationnelles et de produits de fonctions de la forme $g_{n,m,k}$ et de réels rationnels. Ce sous-ensemble, étant dense dans un ensemble dense, est également dense.

2. a) Soient $K_1, n_1, f_1, \epsilon_1, K_2, n_2, f_2, \epsilon_2$. Supposons que $B_{K_1,n_1}(f_1, \epsilon_1) \cap B_{K_2,n_2}(f_2, \epsilon_2)$ est non-vide et fixons $g \in B_{K_1,n_1}(f_1, \epsilon_1) \cap B_{K_2,n_2}(f_2, \epsilon_2)$. Montrons qu'il existe $K_3, n_3, f_3, \epsilon_3$ tels que :

$$g \in B_{K_3,n_3}(f_3, \epsilon_3) \subset B_{K_1,n_1}(f_1, \epsilon_1) \cap B_{K_2,n_2}(f_2, \epsilon_2)$$

Posons :

$$\begin{gathered} K_3 = K_1 \cup K_2 \\ n_3 = \max(n_1, n_2) \\ f_3 = g \\ \epsilon_3 = \min\left(\epsilon_1 - ||g - f_1||_{K_1,n_1}, \epsilon_2 - ||g - f_2||_{K_2,n_2}\right) \end{gathered}$$

On a $g \in B_{K_3,n_3}(f_3, \epsilon_3)$. Montrons $B_{K_3,n_3}(f_3, \epsilon_3) \subset B_{K_1,n_1}(f_1, \epsilon_1) \cap B_{K_2,n_2}(f_2, \epsilon_2)$.
Si $h \in B_{K_3,n_3}(f_3, \epsilon_3)$, on a $||g - h||_{K_1,n_1} \leq ||g - h||_{K_3,n_3} < \epsilon_3 \leq \epsilon_1 - ||g - f_1||_{K_1,n_1}$. Donc $||h - f_1||_{K_1,n_1} < \epsilon_1$.
De même, $||h - f_2||_{K_2,n_2} < \epsilon_2$.
b) Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite f_∞ si, pour tous k_1, k_2, $\frac{\partial^{k_1+k_2} f_n}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2}$ converge uniformément vers $\frac{\partial^{k_1+k_2} f_\infty}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2}$ sur tout compact.
c) Nous allons montrer que l'ensemble des polynômes est dense dans cette topologie. Comme il contient un sous-ensemble dénombrable dense (l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels), cela impliquera que la topologie est séparable.
Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes.
Il faut montrer que, pour tous K, n, f, ϵ, $\mathcal{P} \cap B_{K,n}(f, \epsilon) \neq \emptyset$. On procède par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, c'est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass. La famille $\mathcal{P}$, restreinte à n'importe quel compact $K \subset \mathbb{R}^2$, est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ qui contient les constantes et sépare les points. Elle est donc dense pour la norme uniforme.

Supposons qu'on l'a démontré pour n et montrons-le pour $n + 1$.
Supposons K, f, ϵ fixés. Soit $M > 0$ tel que $K \subset [-M; M] \times [-M; M]$. On note $L = [-M; M] \times [-M; M]$. Supposons temporairement un $\epsilon' > 0$ fixé.
Soient $P_x \in \mathcal{P} \cap B_{L,n}(\partial_x f, \epsilon'), P_y \in \mathcal{P} \cap B_{L,n}(\partial_y f, \epsilon')$ et $P_{x,y} \in \mathcal{P} \cap B_{L,n}(\partial_x \partial_y f, \epsilon')$. Ils existent à cause de l'hypothèse de récurrence.
Posons :

$$Q(x, y) = f(0, 0) + \int_0^x P_x(u, 0)du + \int_0^y P_y(0, t)dt + \int_0^x \int_0^y P_{x,y}(u, t)du\, dt$$

C'est une fonction polynomiale. Majorons $||\partial_x^{k_1} \partial_y^{k_2} Q - \partial_x^{k_1} \partial_y^{k_2} f||_{\infty,K}$ pour $k_1 + k_2 \leq n + 1$.

- Premier cas : $k_1 = k_2 = 0$.
  Pour tous $x, y \in L$ (donc également pour tous $x, y \in K$) :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \int_0^y \partial_y f(0,t)dt + \int_0^x \partial_x f(u,y)du \\ &= f(0,0) + \int_0^y \partial_y f(0,t)dt + \int_0^x \partial_x f(u,0)du + \int_0^x \int_0^y \partial_x \partial_y f(u,t)du\,dt \end{aligned}$$

  donc, vues les définitions de P_x, P_y et $P_{x,y}$:

$$|f(x,y) - Q(x,y)| \leq (2M + M^2)\epsilon'$$

- Deuxième cas : $k_1 = 1, k_2 = 0$ (ou, symétriquement, $k_1 = 0, k_2 = 1$)

$$\begin{aligned} \partial_x Q(x,y) &= P_x(x,0) + \int_0^y P_{x,y}(x,t)dt \\ \partial_x f(x,y) &= \partial_x f(x,0) + \int_0^y \partial_x \partial_y f(x,t)dt \end{aligned}$$

  donc :

$$|\partial_x f(x,y) - \partial_x Q(x,y)| \leq (1+M)\epsilon'$$

- Troisième cas : $k_1 > 1, k_2 = 0$ (ou, symétriquement, $k_1 = 0, k_2 > 1$)

$$\begin{aligned} \partial_x^{k_1} Q(x,y) &= \partial_x^{k_1-1} P_x(x,0) + \int_0^y \partial_x^{k_1-1} P_{x,y}(x,t)dt \\ \partial_x^{k_1} f(x,y) &= \partial_x^{k_1} f(x,0) + \int_0^y \partial_x^{k_1} \partial_y f(x,t)dt \end{aligned}$$

  donc :

$$|\partial_x^{k_1} f(x,y) - \partial_x^{k_1} Q(x,y)| \leq (1+M)\epsilon'$$

- Quatrième cas : $k_1 > 0, k_2 > 0$

$$\begin{aligned} \partial_x^{k_1} \partial_y^{k_2} Q(x,y) &= \partial_x^{k_1-1} \partial_y^{k_2-1} P_{x,y}(x,y) \\ \partial_x^{k_1} \partial_y^{k_2} f(x,y) &= \partial_x^{k_1-1} \partial_y^{k_2-1} (\partial_x \partial_y f)(x,y) \end{aligned}$$

  donc :

$$|\partial_x^{k_1} \partial_y^{k_2} Q(x,y) - \partial_x^{k_1} \partial_y^{k_2} f(x,y)| \leq \epsilon'$$

Toutes ces majorations impliquent $||f - Q||_{K,n+1} < \epsilon$ si on a choisi ϵ' assez petit.

Exercice 3

1. a) L'existence de a_n est une conséquence de la compacité de A_n, partie fermée d'un compact. Quitte à extraire, on peut supposer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $a \in X$. Pour tout n, $\phi_{A_n}(a_n) = 0$. On a $\phi_{A_n}(a) \leq \phi_{A_n}(a_n) + d(a_n, a) = d(a_n, a)$ donc $\phi_{A_n}(a) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Puisque $\phi_{A_n} \to f$ uniformément, $f(a) = 0$ donc $a \in A$.
Puisque $\phi_{A_n}(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$ et $d(x, a_n) \to d(x, a)$, on a bien $f(x) = d(x, a)$.

b) La fonction f est 1-lipschitzienne car c'est une limite de fonctions 1-lipschitziennes (et l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes est fermé pour la norme uniforme).
Pour tout $x \in X$ et tout $a \in A$, $f(x) \leq f(a) + d(x,a) = d(x,a)$. En prenant la borne inférieure sur a, on obtient $f(x) \leq d(x,A) = \phi_A(x)$.
c) D'après a), $f(x) \geq \inf_{a \in A} d(x,a) = \phi_A(x)$. D'après b), cela implique $f = \phi_A$.

2. L'ensemble $\{\phi_A\}_{A \in \mathcal{F}}$ est fermé dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, d'après la question 1. Il est équicontinu (les fonctions ϕ_A sont toutes 1-lipschitziennes) et les fonctions ϕ_A sont uniformément bornées (par le diamètre de X) donc l'image des ϕ_A est d'adhérence compacte dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\{\phi_A\}_{A \in \mathcal{F}}$ est donc compact pour la norme uniforme, d'après le théorème d'Ascoli. Puisque $(\mathcal{F}, \delta)$ est isométrique à $(\{\phi_A\}_A, ||.||_\infty)$, l'ensemble $(\mathcal{F}, \delta)$ est également compact.

Exercice 4

1. Soit N tel que, si $|t - t'| \leq \epsilon/N$ et $|x - x'| \leq \epsilon M/N$, alors :

$$|f(t,x) - f(t',x')| \leq \delta$$

Un tel N existe car f est uniformément continue, d'après le théorème de Heine.
On définit X_δ sur $\left[0; \frac{k}{N}\epsilon\right]$ par récurrence sur k.

- Pour $k = 0$, on pose $X_\delta(0) = x_0$.
- Si X_δ est définie sur $\left[0; \frac{k}{N}\epsilon\right]$, on pose :

$$X_\delta(t) = X_\delta\left(\frac{k}{N}\epsilon\right) + \left(t - \frac{k}{N}\epsilon\right) f\left(\frac{k}{N}\epsilon, X_\delta\left(\frac{k}{N}\epsilon\right)\right) \qquad \forall t \in \left[\frac{k}{N}\epsilon; \frac{k+1}{N}\epsilon\right]$$

On peut montrer par récurrence que, pour tout $t \in \left[\frac{k}{N}\epsilon; \frac{k+1}{N}\epsilon\right]$:

$$|X_\delta(t) - x_0| \leq tM$$

En particulier, on a toujours $|X_\delta(t) - x_0| \leq R$ et donc la définition est valide.
La fonction est bien continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. De plus, pour tout k et tout $t \in \left[\frac{k}{N}\epsilon; \frac{k+1}{N}\epsilon\right]$:

$$\left|X_\delta(t) - X_\delta\left(\frac{k}{N}\epsilon\right)\right| \leq \frac{\epsilon}{N}M$$

Donc, si X_δ est dérivable en t :

$$|X'_\delta(t) - f(t, X_\delta(t))| = \left|f\left(\frac{k}{N}\epsilon, X_\delta\left(\frac{k}{N}\epsilon\right)\right) - f(t, X_\delta(t))\right| \leq \delta$$

2. Considérons $\{X_\delta\}_{0<\delta\leq 1} \subset \mathcal{C}^0([0;\epsilon], \mathbb{R}^n)$. Cette famille de fonctions est équicontinue.
En effet, pour tout $\delta \in]0;1]$, la dérivée de X_δ existe partout sauf en un nombre fini de points et, partout où elle existe, elle est inférieure à $M + \delta \leq M + 1$. Comme X_δ est de plus continue, on en déduit que X_δ est $(M+1)$-lipschitzienne.
La famille $\{X_\delta\}$ est de plus uniformément bornée (par R, puisque $(t, X_\delta(t))$ reste dans l'ensemble de définition de f) donc son image est d'adhérence compacte dans $\mathbb{R}$.

D'après le théorème d'Ascoli, cette famille est donc d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^0([0;\epsilon],\mathbb{R}^n)$ et la suite $(X_{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une sous-suite convergente au sens de la norme uniforme.

3. Pour tout t, $X(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} X_{\delta_n}(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^t X'_{\delta_n}(t)dt$.

Pour tout n, $\left|\int_0^t X'_{\delta_n}(t)dt - \int_0^t f(t, X_{\delta_n}(t))dt\right| \leq \delta_n t \leq \delta_n \epsilon$.

De plus, $t \to f(t, X_{\delta_n}(t))$ converge uniformément vers $t \to f(t, X(t))$ (car f est uniformément continue) donc :

$$X(t) = \int_0^t f(t, X(t))dt$$

La fonction X est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $t \to f(t, X(t))$.

Exercice 5

1. Soit $f \in F$ non-nulle. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $x \to P(x)f(x)$ est un élément de F, qui n'est pas la fonction nulle si $P \neq 0$. En effet, si $P(x)f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, cela signifie que f n'a qu'un nombre fini de valeurs non-nulles (puisque P n'a qu'un nombre fini de racines). Puisque f est une fonction continue, f est donc identiquement nulle, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse qu'on a faite sur f.

L'application $P \in \mathbb{R}[X] \to (x \to P(x)f(x)) \in F$ est donc linéaire et injective. Puisque $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie, F aussi.

2. Pour tout k, D^k est continue. En effet, par définition de la topologie sur F, $(D^k)^{-1}(B(g,\epsilon))$ est un ouvert de F, pour toute $g \in E$ et tout $\epsilon > 0$. Comme les $B(g,\epsilon)$ engendre la topologie de E, l'antécédant par D^k de tout ouvert de E est un ouvert de F. Donc, si $f_n \to f$ dans F, $D^k(f_n) \to D^k(f)$ dans E, c'est-à-dire $||D^k(f_n) - D^k(f)|| \to 0$.

Réciproquement, supposons que, pour tout k, $||D^k(f_n) - D^k(f)|| \to 0$ quand $n \to +\infty$. Alors, pour toute $g \in E$ et tout $\epsilon > 0$, si $f \in \{f \in F \text{ tq } ||D^k f - g||_\infty < \epsilon\}$, la suite f_n appartient aussi à $\{f \in F \text{ tq } ||D^k f - g||_\infty < \epsilon\}$ à partir d'un certain rang (par inégalité triangulaire). Comme les $\{f \in F \text{ tq } ||D^k f - g||_\infty < \epsilon\}$ engendrent la topologie de F, tout ouvert de F contenant f contient aussi f_n pour tout n assez grand.

Montrons que F est métrisable. Posons :

$$d(f_1, f_2) = \sum_k \frac{\min(1, ||D^k(f_1) - D^k(f_2)||)}{2^k}$$

Il s'agit bien d'une distance :

- $d(f_1, f_2) = d(f_2, f_1)$
- $(d(f_1, f_2) = 0) \Rightarrow (||D^0(f_1) - D^0(f_2)|| = 0) \Leftrightarrow (f_1 = f_2)$
- L'inégalité triangulaire est vérifiée :

$$\begin{aligned}
d(f_1, f_3) &\leq \sum_k \frac{\min(1, ||D^k(f_1) - D^k(f_2)|| + ||D^k(f_2) - D^k(f_3)||)}{2^k} \\
&\leq \sum_k \frac{\min(1, ||D^k(f_1) - D^k(f_2)||)}{2^k} + \sum_k \frac{\min(1, ||D^k(f_2) - D^k(f_3)||)}{2^k} \\
&= d(f_1, f_2) + d(f_2, f_3)
\end{aligned}$$

Montrons que d engendre la topologie de F.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toutes $f_1, f_2 \in F$, $\min(1, ||D^k(f_1) - D^k(f_2)||) \leq 2^k d(f_1, f_2)$ donc $||D^k(f_1) - D^k(f_2)|| \leq \omega_k(d(f_1, f_2))$ où $\omega_k : \mathbb{R}^+ \to [0; +\infty]$ est la fonction telle que :

$$\begin{aligned} \omega_k(x) &= +\infty \text{ si } x \geq 2^{-k} \\ &= 2^k x \text{ si } x < 2^{-k} \end{aligned}$$

Cela implique que les $D^k : F \to E$ sont continues pour la topologie induite sur F par la distance d. Pour toute $g \in E$ et tout $\epsilon > 0$, $\{f \in F \text{ tq } ||D^k f - g||_\infty < \epsilon\}$ est l'antécédant par D^k d'un ouvert de E. C'est donc un ouvert de F au sens de la topologie induite sur F par d. Donc tous les ouverts de F sont aussi des ouverts au sens de la distance d.

Montrons maintenant que la topologie de F est plus fine que la topologie engendrée par d.
Puisque $\{B_d(f_0, \epsilon)\}_{f_0 \in F, \epsilon > 0}$ est une base d'ouverts de la topologie engendrée par d, il suffit de montrer que, pour toute $f_0 \in F$ et tout $\epsilon > 0$, $B_d(f_0, \epsilon)$ est un ouvert de F.
Posons, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et toutes $f_1, f_2 \in F$, $d_N(f_1, f_2) = \sum_{k \leq N} \frac{\min(1, ||D^k(f_1) - D^k(f_2)||)}{2^k}$.
La suite $(d_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers d. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, d_N est continue sur F^2 (car composée de fonctions continues). La limite d de $(d_N)_N$ est donc également continue (pour la topologie de F).
Pour toute $f_0 \in F$ et tout $\epsilon > 0$, puisque la fonction $d_{f_0} : f \to d(f_0, f)$ est continue, $B_d(f_0, \epsilon) = d_{f_0}^{-1}(] - \epsilon; \epsilon[)$ est un ouvert de F.
3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F. On suppose que, pour tout k, $(D^k(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E vers une limite g_k.
Pour tout k, $(D^k(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers g_k. De plus, la suite de ses dérivées, $(D^{k+1}(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$, converge uniformément (vers g_{k+1}). La limite g_k est donc dérivable, de dérivée g_{k+1}.
Ainsi, par récurrence, g_0 est infiniment dérivable et, pour tout k, $g_0^{(k)} = g_k$. Donc $g_0 \in F$ et, pour tout k :

$$||D^k(f_n) - D^k(g_0)|| = ||D^k(f_n) - g_k|| \to 0$$

Donc, par 2., $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F vers g_0.
Réciproquement, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F vers une limite g, alors, pour tout k, puisque D^k est continue, $(D^k(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $D^k(g)$ dans E.
4. Si K est relativement compacte, $\overline{K}$ est compacte. Puisque D^k est continue sur F, $D^k(\overline{K})$ est compacte dans E pour tout k. Donc, pour tout k, l'ensemble $D^k(K)$ est inclus dans un compact de E. Son adhérence est donc un fermé inclus dans un compact ; elle est donc compacte et $D^k(K)$ est relativement compact.
Supposons réciproquement que $D^k(K)$ est relativement compact dans E pour tout k et montrons que $\overline{K}$ est compact.
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{K}$. Montrons qu'on peut en extraire une sous-suite convergente (cela suffit car F est métrisable par la question 2.).
Pour tout k, $D^k(\overline{K}) \subset \overline{D^k(K)}$ car D^k est continue. Puisque, par hypothèse, $\overline{D^k(K)}$ est compact, on peut extraire de $(D^k(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge dans E.

Par extraction diagonale, on peut ainsi montrer qu'il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $(D^k(f_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E pour tout $k \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente, $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors dans F.

5. D'après la question précédente, il suffit de montrer que $D^k(B)$ est relativement compacte dans E pour tout $k \in \mathbb{N}$. Fixons k.
Posons $X = \{f : [0;1] \to \mathbb{R} \text{ continue tq } f(0) = f(1) = 0\}$ et munissons X de la norme de la convergence uniforme. L'ensemble X est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$.
L'application $\phi : f \in E \to f_{|[0;1]} \in X$ est une isométrie car $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x) - g(x)|$ si f et g sont nulles sur $\mathbb{R} - [0;1]$. De plus, ϕ est surjective : pour toute $f \in X$, la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est égale à f sur $[0;1]$ et nulle en-dehors appartient à E et on a $\phi(g) = f$.
L'application ϕ est donc un isomorphisme de E vers X et, pour montrer que $D^k(B)$ est relativement compacte dans E, il suffit de montrer que $\phi(D^k(B))$ est relativement compacte dans X. Puisque X est fermé dans $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$, il suffit de montrer que $\phi(D^k(B))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$.
Puisque $\sup\limits_{f\in B} ||D^k(f)||_\infty < M$ pour une certaine constante M, l'ensemble $\phi(D^k(B))$ est équiborné dans $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$.
De plus, si on fixe $M' > \sup\limits_{f\in B} ||D^{k+1}(f)||_\infty$, on a, pour toute $f \in B$:

$$||(D^k(f))'||_\infty = ||D^{k+1}(f)||_\infty < M'$$

Les fonctions de $D^k(B)$ sont donc toutes M'-lipschitziennes. Leurs images par ϕ sont donc également M'-lipschitziennes. L'ensemble $\phi(D^k(B))$ est donc équicontinu.
D'après le théorème d'Ascoli, $\phi(D^k(B))$ est donc relativement compacte dans $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$. C'est ce que l'on souhaitait démontrer.

6. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une norme N qui engendre la topologie de F. Notons B la boule unité pour N.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, D^k est une application linéaire continue sur F. Il doit donc exister $C_k > 0$ tel que, pour toute $f \in F$, $||D^k(f)|| \leq C_k N(f)$. L'ensemble $D^k(B)$ est alors inclus dans $B_E(0, C_k)$.
D'après la question précédente, cela implique que B est relativement compacte. Mais un espace vectoriel normé n'a sa boule unité relativement compacte que s'il est de dimension finie. C'est en contradiction avec la question 1.

Exercice 6

1. Soit A l'ensemble des couples (F', l') satisfaisant les propriétés 1 et 2. On munit A d'un ordre : $(F', l') \leq (F'', l'')$ si et seulement si $F' \subset F''$ et $l''_{|F'} = l'$.
Montrons que A est inductif.
Soit $\{(F'_i, l'_i)\}_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de A. Posons $G = \bigcup\limits_{i\in I} F'_i$ et, pour tout $x \in G$, posons $m(x) = l'_i(x)$, où i est un élément de I tel que $x \in F'_i$.
La définition de m ne dépend pas du choix de i. En effet, si i et j sont deux indices différents tels que $x \in F'_i$ et $x \in F'_j$, on a $(F'_i, l'_i) \leq (F'_j, l'_j)$ ou bien $(F'_j, l'_j) \leq (F'_i, l'_i)$ et, dans les deux cas, l'_i et l'_j coïncident sur $F'_i \cap F'_j$ (à cause de la façon dont on a défini l'ordre).

L'application m est linéaire. En effet, soient $x, y \in G, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe i, j tels que $x \in F'_i, y \in F'_j$. Puisque $(F'_i, l'_i) \leq (F'_j, l'_j)$ ou $(F'_j, l'_j) \leq (F'_i, l'_i)$, on a $F'_i \subset F'_j$ ou $F'_j \subset F'_i$. Donc $x, y \in F'_i$ ou $x, y \in F'_j$. Par symétrie, supposons qu'on a $x, y \in F'_i$.
Alors $m(\lambda x + \mu y) = l'_i(\lambda x + \mu y) = \lambda l'_i(x) + \mu l'_i(y) = \lambda m(x) + \mu m(y)$.
L'application m coïncide avec l sur F et vérifie $m(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in G$ (car chaque l'_i vérifie cette propriété).
Le couple (G, m) vérifie donc les propriétés 1 et 2 et est un majorant de $\{(F'_i, l'_i)\}_{i \in I}$ dans A.

D'après le lemme de Zorn, A admet donc un élément maximal (F', l'). Cet élément vérifie la propriété 3.

2. a) On va définir l'' par $l''(x + ra) = l'(x) + rb$ avec $b \in \mathbb{R}$ bien choisi, pour tous $x \in F'$ et $r \in \mathbb{R}$.
Avec une telle définition, la propriété 1 sera nécessairement vérifiée. Il reste donc à voir comment choisir b de sorte que la propriété 2 soit aussi vérifiée.
On veut $l'(x) + rb \leq p(x + ra)$ pour tous $x \in F', r \in \mathbb{R}$. Puisque $l'(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F'$, c'est équivalent à :

$$\sup_{x \in F', r < 0} \frac{p(x + ra) - l'(x)}{r} \leq b \leq \inf_{x \in F', r > 0} \frac{p(x + ra) - l'(x)}{r}$$

Il suffit donc de montrer :

$$\sup_{x \in F', r < 0} \frac{p(x + ra) - l'(x)}{r} \leq \inf_{x \in F', r > 0} \frac{p(x + ra) - l'(x)}{r}$$

Soient $x_1, x_2 \in F', r_1 < 0, r_2 > 0$. Montrons :

$$\frac{p(x_1 + r_1 a) - l'(x_1)}{r_1} \leq \frac{p(x_2 + r_2 a) - l'(x_2)}{r_2}$$

C'est équivalent à :

$$\begin{aligned}
& r_2 p(x_1 + r_1 a) - r_1 p(x_2 + r_2 a) \geq l'(r_2 x_1 - r_1 x_2) \\
\iff \quad & (r_2 - r_1) \left(\frac{r_2}{r_2 - r_1} p(x_1 + r_1 a) - \frac{r_1}{r_2 - r_1} p(x_2 + r_2 a) \right) \geq l'(r_2 x_1 - r_1 x_2)
\end{aligned}$$

Mais puisque p est convexe :

$$\begin{aligned}
(r_2 - r_1) & \left(\frac{r_2}{r_2 - r_1} p(x_1 + r_1 a) - \frac{r_1}{r_2 - r_1} p(x_2 + r_2 a) \right) \\
& \geq (r_2 - r_1)\, p \left(\frac{r_2}{r_2 - r_1} (x_1 + r_1 a) - \frac{r_1}{r_2 - r_1} (x_2 + r_2 a) \right) \\
& = (r_2 - r_1)\, p \left(\frac{r_2 x_1 - r_1 x_2}{r_2 - r_1} \right) \\
& \geq (r_2 - r_1)\, l' \left(\frac{r_2 x_1 - r_1 x_2}{r_2 - r_1} \right) \\
& = l'(r_2 x_1 - r_1 x_2)
\end{aligned}$$

b) Le couple $(F' \oplus \mathbb{R}a, l'')$ vérifie les propriétés 1 et 2 de la question 1 et F' est strictement inclus dans $F' \oplus \mathbb{R}a$. Donc (F', l') ne vérifie pas la propriété 3. C'est absurde.
Donc un (F', l') qui vérifie les propriétés de la question 1 doit aussi vérifier $F' = E$. Comme un tel (F', l') existe, le résultat voulu est démontré pour $\tilde{l} = l'$.

3. a) Soient E un espace vectoriel normé et a un élément de E. Montrons qu'il existe une forme linéaire $\phi : E \to \mathbb{R}$ telle que $||\phi|| = 1$ et $\phi(a) = ||a||$.
On pose $F = \mathbb{R}a$, $p(x) = ||x||$ et $l(ra) = r||a||$.
D'après le théorème qu'on a démontré dans la question précédente, il existe une forme linéaire ϕ qui coïncide avec l sur F et telle que $\phi(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.
L'inégalité $\phi(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$ implique $||\phi|| \leq 1$.
De plus, $\phi(a) = l(a) = ||a||$.
b) Si H est dense, une forme linéaire continue qui s'annule sur H doit s'annuler sur tout E.
Supposons maintenant que H n'est pas dense et montrons qu'il existe une forme linéaire continue qui est nulle sur H mais n'est pas identiquement nulle sur E.
Soit $a \in E - \overline{H}$. Posons $F = \overline{H} \oplus \mathbb{R}a$. Définissons $l : F \to \mathbb{R}$ par :

$$l(h + ra) = r \qquad \forall h \in \overline{H}, r \in \mathbb{R}$$

Il existe $C > 0$ tel que, pour tous $h \in \overline{H}, r \in \mathbb{R}$:

$$r \leq C||h + ra||$$

En effet, si ce n'est pas le cas, il existe une suite $(h_n, r_n) \in \overline{H} \times \mathbb{R}$ telle que, pour tout n :

$$r_n > n||h_n + r_n a||$$

Quitte à remplacer (h_n, r_n) par $(h_n/r_n, 1)$, on peut supposer que $r_n = 1$ pour tout n. Alors, la suite $||h_n + a||$ tend vers 0, ce qui implique que a appartient à $\overline{H}$. C'est absurde.
Donc la constante C existe. On pose $p(x) = C||x||$.
D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire $\phi : E \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec l sur F et qui vérifie $\phi(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.
La fonction ϕ est nulle sur H. Comme elle vérifie $\phi(x) \leq C||x||$ pour tout x, elle est continue.
De plus, $\phi(a) = l(a) = 1 \neq 0$ donc ϕ n'est pas identiquement nulle sur E.
c) Quitte à translater C et x, on peut supposer que $0 \in C$.
Posons $F = \mathbb{R}x$ et $l(rx) = r$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Soit p la fonction qui vaut 1 sur C et $+\infty$ sur $E - C$. Comme E est convexe, C est convexe.
Pour tout $r \in \mathbb{R}$, $l(rx) \leq p(rx)$. En effet, si $r \leq 1$, $l(rx) \leq 1 \leq p(rx)$. Si $r > 1$, $rx \notin C$ (sinon, comme $0 \in C$, on devrait aussi avoir $x \in C$) donc $l(rx) < +\infty = p(rx)$.
D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire $\phi : E \to \mathbb{R}$ telle que ϕ coïncide avec l sur F et $\phi(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.
Puisque ϕ coïncide avec l sur F, $\phi(x) = l(x) = 1$.
Puisque $p(x) = 1$ pour tout $x \in C$, $\phi(x) \leq 1$ pour tout $x \in C$. Donc la forme linéaire ϕ satisfait la propriété demandée avec $a = 1$.