École Normale Supérieure
6 novembre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$6

Exercice 1 : questions diverses

1. [Raffinement du théorème de Banach-Steinhaus]
Soient E, F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires et continus de E dans F.
On suppose que $(T_i)_{i\in I}$ n'est pas bornée dans $\mathcal{L}_c(E,F)$. Montrer qu'il existe un G_δ-dense $G\subset E$ tel que :

$$\forall x\in G, \qquad \sup_{i\in I} ||T_i(x)|| = +\infty$$

[On appelle G_δ-dense une intersection dénombrable d'ouverts denses.]

2. Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach. Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels fermés de E tels que F_1+F_2 est fermé dans E.
Montrer qu'il existe $C>0$ tel que, pour tout $z\in F_1+F_2$, il existe $y_1\in F_1$ et $y_2\in F_2$ tels que $y_1+y_2=z$, $||y_1||\leq C||z||$ et $||y_2||\leq C||z||$.
[Indication : Considérer l'application $\phi : F_1\times F_2\to F_1+F_2$ telle que $\phi(y_1,y_2)=y_1+y_2$.]

3. Soient E, F deux espaces de Banach. Montrer que l'ensemble des applications linéaires continues et surjectives de E dans F est ouvert dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ (l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans F).

Exercice 2 : divergence des séries de Fourier de fonctions continues

Soit $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit :

$$\begin{aligned} S_n : \mathcal{C}_{2\pi} &\to \mathcal{C}_{2\pi} \\ f &\to \left(t\to \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}\right)\end{aligned}$$

(où $c_k(f)$ désigne le k-ième coefficient de Fourier de f : $c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$)

1. Soit $t_0\in\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup_{f\in\mathcal{C}_{2\pi}} \frac{|S_n(f)(t_0)|}{||f||_\infty} \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt$$

(où, pour tous $n\in\mathbb{N}, t\in\mathbb{R}$, $D_n(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt}$)

2. En utilisant la question 1 de l'exercice 1, montrer qu'il existe un sous-ensemble dense D de $\mathcal{C}_{2\pi}$ tel que, pour toute $f\in D$, la série de Fourier de f ne converge pas vers $f(t_0)$ en t_0.

Exercice 3
Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé dont tous les éléments sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que $T : f \in F \to f' \in E$ est une application continue.

2. Montrer que la boule unité de F forme une famille équicontinue de fonctions.

3. En déduire que F est de dimension finie.

Exercice 4 : théorème du point fixe de Schauder
Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach.
Pour toute $C \subset E$, on note $\text{Conv}(C)$ l'enveloppe convexe de C.

1. Soit $K \subset E$ compacte. Montrer que $\overline{\text{Conv}(K)}$ est compacte.

2. On admet le théorème de Brouwer : pour tout $n \geq 1$, si $C \subset \mathbb{R}^n$ est un convexe compact et $f : C \to C$ est continue, alors f admet un point fixe.
On va démontrer le théorème du point fixe de Tychonov : si $C \subset E$ est convexe et compacte, alors toute application continue $f : C \to C$ admet un point fixe.
Soient C et f fixées.
a) Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soient $y_1, ..., y_n \in C$ tels que :

$$C \subset \bigcup_{k \leq n} B(y_k, \epsilon)$$

On pose, pour tout $x \in C$:

$$\phi(x) = \frac{\sum\limits_k y_k . d\left(x, E - B(y_k, \epsilon)\right)}{\sum\limits_k d\left(x, E - B(y_k, \epsilon)\right)}$$

Montrer que, pour tout $x \in C$, $||\phi(x) - x|| < \epsilon$.
b) Soit $\psi = \phi \circ f$. Montrer que ψ admet un point fixe sur $\text{Conv}(\{y_1, ..., y_n\})$.
c) En déduire qu'il existe $x_\epsilon \in C$ tel que $||f(x_\epsilon) - x_\epsilon|| < \epsilon$. Conclure.

3. Démontrer le théorème du point fixe de Schauder : soit $C \subset E$ convexe et fermée. Soit $f : C \to C$ continue telle que $\overline{f(C)}$ est compacte. Alors f admet un point fixe.

Exercice 5 : théorème du point fixe de Schaefer
Soit E un espace de Banach. Soit $T : E \to E$ une application continue vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Si $\Omega \subset E$ est bornée, $\overline{T(\Omega)}$ est compacte.
2. $\{x \in E \text{ tq } \exists \lambda \in [0;1], x = \lambda T(x)\}$ est borné.

Montrer que T a un point fixe.
[Indication : Utiliser l'exercice précédent.]

Exercice 6 : bases de Schauder

Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach de dimension infinie.

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'éléments de E. On dit que c'est une *base de Schauder* de E si, pour tout $x \in E$, il existe une unique suite $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left|\left| x - \sum_{n\leq N} \alpha_n(x) e_n \right|\right| \to 0 \qquad \text{quand } N \to +\infty$$

1. a) Montrer que, pour tout $p \in [1; +\infty[$, $l^p(\mathbb{N})$ admet une base de Schauder.

b) Montrer que si un espace E admet une base de Schauder, alors il est séparable. En déduire que $l^\infty(\mathbb{N})$ n'admet pas de base de Schauder.

2. Dans cette question, on suppose que E admet une base de Schauder, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $x \in E$, on pose $M(x) = \sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \left|\left| \sum\limits_{n\leq N} \alpha_n(x) e_n \right|\right|$.

a) Montrer que, pour tout x, $M(x) \geq ||x||$ et que M est une norme.

[Indication : montrer d'abord que les α_n sont des applications linéaires.]

b) Montrer que (E, M) est complet.

[Indication : fixer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour M. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite x_∞ au sens de la norme $||.||$. Montrer ensuite que, pour tout k, $(\alpha_k(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel a_k, puis que $\sum\limits_{k\leq N} a_k e_k \to x_\infty$ quand $N \to +\infty$.]

c) Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $M(x) \leq K||x||$ pour tout $x \in E$.

d) Montrer que, pour tout n, $\alpha_n : E \to \mathbb{R}$ est une application continue.

3. [Indépendant des questions 1. et 2.]

Dans cette question, on montre que $(\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ possède la propriété de Daugavet : si $K \in \mathcal{L}(\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}))$ est un opérateur continu et de rang fini, alors,

$$||Id + K|| = 1 + ||K||$$

Soit K un tel opérateur.

On pourra admettre le théorème suivant : pour toute forme linéaire continue $\phi : \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, il existe deux mesures finies μ et ν sur $[0; 1]$ telles que, pour toute $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$:

$$\phi(f) = \int_0^1 f d\mu - \int_0^1 f d\nu$$

a) Montrer qu'il existe $g_1, ..., g_m \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et $\mu_1, ..., \mu_m, \nu_1, ..., \nu_m$ des mesures finies sur $[0; 1]$ telles que, pour toute $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$:

$$K(f) = \sum_{n=1}^{m} \left(\int_0^1 f d\mu_n - \int_0^1 f d\nu_n \right) g_n$$

b) Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soit f_0 telle que $||f_0||_\infty = 1$ et $||K(f_0)||_\infty > ||K|| - \epsilon/2$. On note $h_0 = K(f_0)$. Quitte à remplacer h_0 par $-h_0$, on peut supposer que $||h_0||_\infty = \max h_0$.

On note $M = \sup\limits_{n=1,...,m} ||g_n||_\infty$.

Montrer qu'il existe $a, b \in [0; 1]$ avec $a < b$ tels que :

1. $h_0(t) \geq ||K|| - \epsilon/2$ pour tout $t \in]a;b[$.
2. $\sup\limits_{n=1,\ldots,m} (\mu_n(]a;b[) + \nu_n(]a;b[)) \leq \frac{\epsilon}{4mM}$

c) Montrer qu'il existe une fonction continue f_1 telle que :

1. $||f_1||_\infty = 1$
2. $f_1((a+b)/2) = 1$
3. $f_1 = f_0$ sur $[0;1] -]a;b[$

Montrer que $||f_1 + K(f_1)||_\infty \geq 1 + ||K|| - \epsilon$ et conclure.

4. On dit qu'une base de Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace de Banach E est inconditionnelle si, pour tout $x \in E$ et toute permutation $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$\sum_{n\leq N} \alpha_{\pi(n)}(x) e_{\pi(n)} \to x \qquad \text{quand } N \to +\infty$$

On va montrer que $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ n'admet pas de base inconditionnelle.
Supposons par l'absurde que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle. Alors tout $x \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n(x) f_n$$

Pour tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{N}$ fini, on note :

$$P_A : x \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}) \to P_A(x) = \sum_{n\in A} \alpha_n(x) f_n \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$$

a) On note $\beta = \sup\limits_{A\subset\mathbb{N} \text{ finie}} ||P_A||$. Montrer que $\beta < +\infty$.
[Indication : utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.]
Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soit $A_0 \subset \mathbb{N}$ finie telle que $||P_{A_0}|| > \beta - \epsilon/2$.
b) Montrer que $||Id - P_{A_0}|| \leq \beta$.
c) Montrer d'autre part, à l'aide de la question 3., que $||Id - P_{A_0}|| = 1 + ||P_{A_0}||$ et conclure.