École Normale Supérieure
6 novembre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n^{o}6

Corrigé

Exercice 1

1. On reprend le principe de la preuve du théorème de Banach-Steinhaus.
Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on note $E_M = \{x \in E \text{ tq } \forall i, ||T_i(x)|| \leq M\}$. Les E_M sont des fermés et ils sont tous d'intérieur vide (sinon, la preuve du théorème de Banach-Steinhaus montre que $(T_i)_{i\in I}$ est bornée dans $\mathcal{L}_c(E,F)$).
Posons $G = \bigcap\limits_{M\in\mathbb{N}} (E - E_M)$. Cet ensemble est un G_δ-dense.
De plus, pour tout $x \in G$ et pour tout $M \in \mathbb{N}$, $x \notin E_M$ donc il existe i tel que $||T_i(x)|| > M$. Cela implique que, pour tout $x \in G$:

$$\sup_{i\in I} ||T_i(x)|| = +\infty$$

2. L'ensemble $F_1 \times F_2$ est un espace de Banach pour la norme $||(x,y)|| = ||x|| + ||y||$. L'ensemble $F_1 + F_2$ est un espace de Banach car c'est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach. L'application ϕ est linéaire, continue et surjective entre deux espaces de Banach. D'après le théorème de l'application ouverte, elle est ouverte. Il existe donc $M > 0$ tel que $\overline{B}(0,M) \cap (F_1 + F_2) \subset \phi((B(0,1) \cap F_1) \times (B(0,1) \cap F_2))$.
Pour tout $z \in F_1 + F_2$ tq $z \neq 0$, $M.\frac{z}{||z||} \in \overline{B}(0,M) \cap (F_1 + F_2)$ donc il existe $y_1' \in F_1$, $y_2' \in F_2$ tels que $||y_1'||, ||y_2'|| < 1$ et $y_1' + y_2' = M.\frac{z}{||z||}$.
Posons $C = \frac{1}{M}$, $y_1 = y_1' \frac{||z||}{M}$ et $y_2 = y_2' \frac{||z||}{M}$. On a alors $y_1 + y_2 = z$ et $||y_1|| \leq C||z||, ||y_2|| \leq C||z||$.
3. Notons $\mathcal{S}$ cet espace. On note $||.||$ les normes sur E et F et $|||.|||$ la norme opérateur sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.
Soit $f \in \mathcal{S}$. Montrons qu'un certain voisinage de f dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ est inclus dans $\mathcal{S}$.
Notons $\epsilon > 0$ tel que $\overline{B}_F(0,\epsilon) \subset f(B_E(0,1))$. Il existe d'après le théorème de l'application ouverte. Montrons que $B(f,\epsilon/2) \subset \mathcal{S}$.
Soit $g \in B(f,\epsilon/2)$. Il faut montrer que g est surjective. On note $g = f + h$ avec $h \in B(0,\epsilon/2)$.
Puisque $\overline{B}_F(0,\epsilon) \subset f(B_E(0,1))$, on a la propriété suivante : pour tout $z \in F$, il existe $z' \in E$ tel que $f(z') = z$ et $||z'|| \leq \frac{1}{\epsilon}||z||$. En effet, si $z = 0$, c'est évident et, sinon, $\epsilon\frac{z}{||z||} \in \overline{B}_F(0,\epsilon)$ donc il existe $z'' \in B_E(0,1)$ tel que $f(z'') = \epsilon\frac{z}{||z||}$. En posant $z' = \frac{||z||}{\epsilon}z''$, on a bien $z = f(z')$ et $||z'|| \leq \frac{1}{\epsilon}||z||$.
Soit $y \in F$ quelconque. D'après la propriété que l'on vient d'énoncer, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f(x_0) = y$ et, pour tout n, $f(x_{n+1}) = -h(x_n)$ avec $||x_{n+1}|| \leq \frac{1}{\epsilon}||h(x_n)||$.
Comme $||h|| < \epsilon/2$, on a $||x_{n+1}|| \leq \frac{||x_n||}{2}$.

La somme $x_0 + x_1 + x_2 + ...$ converge donc normalement vers une limite z.
On a :

$$\begin{aligned} g(z) &= \lim_{n\to+\infty} g(x_0 + ... + x_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} f(x_0) + ... + f(x_n) + h(x_0) + ... + h(x_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} y + h(x_n) \\ &= y \end{aligned}$$

Donc $y \in \operatorname{Im} g$.
Puisque c'est vrai pour tout y, g est bien surjective.

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned} S_n(f)(t_0) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \left(\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikt_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-t_0)} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t-t_0) dt \end{aligned}$$

Posons, pour tout $\epsilon > 0$, $f_\epsilon(t) = \frac{D_n(t-t_0)}{\epsilon + |D_n(t-t_0)|}$. C'est bien une fonction continue et 2π-périodique (puisque D_n est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique).
Pour tout t :

$$|D_n(t-t_0)| - \epsilon \leq f_\epsilon(t) D_n(t-t_0) \leq |D_n(t-t_0)|$$

Lorsque $\epsilon \to 0$, $S_n(f_\epsilon)(t_0) \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t-t_0)| dt$.
Pour tout $\epsilon > 0$, $||f_\epsilon||_\infty \leq 1$ donc :

$$\sup_{f \in \mathcal{C}_{2\pi}} \frac{|S_n(f)(t_0)|}{||f||_\infty} \geq \sup_{\epsilon > 0} |S_n(f_\epsilon)(t_0)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt$$

2. L'ensemble $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un espace de Banach (ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans l'espace complet $\mathbb{R}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f \to S_n(f)(t_0))$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{C}_{2\pi}$ vers $\mathcal{C}_{2\pi}$ (puisque, pour tout k et toute $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $|c_k(f)| \leq ||f||_\infty$ donc $f \to c_k(f)$ est un opérateur continu).
La famille $(f \to S_n(f)(t_0))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{C}_{2\pi}, \mathbb{R})$. En effet, d'après ce qu'on a vu

à la question précédente :

$$\begin{aligned}
|||f \to S_n(f)(t_0)||| &\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}\right| dt \\
&\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin((n+1/2)t)}{t}\right| dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi(n+1/2)} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \\
&\to +\infty
\end{aligned}$$

D'après la question 1. de l'exercice précédent, cela implique qu'il existe un G_δ-dense $G \subset \mathcal{C}_{2\pi}$ tel que, pour toute $f \in G$:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f)(t_0)| = +\infty$$

Pour toute $f \in G$, $(S_n(f)(t_0))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Exercice 3

1. C'est une application linéaire entre deux espaces de Banach. Son graphe est fermé : si $(f_n, f_n') \to (f_\infty, g_\infty)$, alors f_∞ est dérivable de dérivée g_∞ (lorsqu'une suite de fonctions converge uniformément et la suite de ses dérivées aussi, la limite est dérivable, de dérivée la limite des dérivées). Donc elle est continue, par le théorème du graphe fermé.

2. Puisque T est continue, il existe $C > 0$ telle que, pour toute $f \in F$, $||T(f)|| \leq C||f||$. En particulier, pour toute $f \in B_F(0,1)$, $||f'|| \leq C$ donc f est une fonction C-lipschitzienne. Cela implique l'équicontinuité.

3. La boule unité de F est d'adhérence compacte dans F, d'après le théorème d'Ascoli : elle est équicontinue et, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [-1;1]$ si $f \in B_F(0,1)$ donc $\{f(x)\}_{f\in B_F(0,1)}$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}$.
Puisque F est fermé, l'adhérence de sa boule unité est la boule unité fermée. L'espace F est donc un espace normé dont la boule unité fermée est compacte. Il est de dimension finie.

Exercice 4

1. Nous allons montrer que $\mathrm{Conv}(K)$ est précompacte dans E. Cela impliquera que $\overline{\mathrm{Conv}(K)}$ l'est aussi : si $\mathrm{Conv}(K) \subset \bigcup_{k\leq N} B(x_k, \epsilon)$, alors $\overline{\mathrm{Conv}(K)} \subset \bigcup_{k\leq N} \overline{B(x_k,\epsilon)} \subset \bigcup_{k\leq N} B(x_k, 2\epsilon)$.
Cela impliquera donc que $\overline{\mathrm{Conv}(K)}$ est compacte, puisque c'est un espace complet (car il s'agit d'une partie fermée d'un espace complet).
Soit $\epsilon > 0$ quelconque.
Soient $x_1, ..., x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{k\leq n} B(x_k, \epsilon/2)$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{n}{N}\sup_{k\leq n} ||x_k|| < \epsilon/2$.
Posons $\mathcal{F} = \left\{\frac{k_1}{N}x_1 + ... + \frac{k_n}{N}x_n \text{ tq } k_1, ..., k_n \in \{0, ..., N\}\right\}$. Montrons que $\mathrm{Conv}(K) \subset \bigcup_{y\in\mathcal{F}} B(y, \epsilon)$.

Soit $Z \in \text{Conv}(K)$ quelconque. Il existe $t_1, ..., t_R \in [0;1]$ et $z_1, ..., z_R \in K$ tels que $t_1 + ... + t_R = 1$ et $t_1 z_1 + ... + t_R z_R = Z$. Pour tout $r \leq R$, soit k_r tel que $z_r \in B(x_{k_r}, \epsilon/2)$.
Alors $||Z - \sum\limits_r t_r x_{k_r}|| \leq \sum\limits_r t_r ||z_r - x_{k_r}|| < \epsilon/2$.
Posons, pour tout $k \leq n$, $T_k = \sum\limits_{k_r = k} t_r$. On a alors $||Z - \sum\limits_k T_k x_k|| < \epsilon/2$.
Si on note K_k la partie entière de NT_k, pour tout k, on a de plus :

$$\left\|\left(\sum_{k\leq n} T_k x_k\right) - \left(\sum_{k\leq n} \frac{K_k}{N} x_k\right)\right\| \leq \sum_{k\leq n} \left|T_k - \frac{K_k}{N}\right| . ||x_k|| \leq \frac{n}{N} \sup_{k\leq n} ||x_k|| < \epsilon/2$$

On en déduit :

$$\left\|Z - \left(\sum_k \frac{K_k}{N} x_k\right)\right\| < \epsilon$$

On a donc montré que $Z \in \bigcup\limits_{y \in \mathcal{F}} B(y, \epsilon)$.

2. a) $\left\|\frac{\sum\limits_k y_k . d(x, E - B(y_k,\epsilon))}{\sum\limits_k d(x, E - B(y_k,\epsilon))} - x\right\| = \left\|\frac{\sum\limits_k (y_k - x) . d(x, E - B(y_k,\epsilon))}{\sum\limits_k d(x, E - B(y_k,\epsilon))}\right\| \leq \frac{\sum\limits_k ||y_k - x|| . d(x, E - B(y_k,\epsilon))}{\sum\limits_k d(x, E - B(y_k,\epsilon))} \leq \epsilon$
La dernière inégalité provient du fait que, pour tout k, $d(x, E - B(y_k, \epsilon)) = 0$ si $||x - y_k|| \geq \epsilon$, ce qui fait que, pour tout k :

$$||y_k - x|| d(x, E - B(y_k, \epsilon)) \leq \epsilon d(x, E - B(y_k, \epsilon))$$

b) Restreinte à $\text{Conv}(\{y_1, ..., y_n\})$, l'application ψ est une fonction continue à valeurs dans $\text{Conv}(\{y_1, ..., y_n\})$. L'ensemble $\text{Conv}(\{y_1, ..., y_n\})$ est un convexe compact inclus dans un sous-espace vectoriel de E de dimension au plus n. D'après le théorème de Brouwer, ψ admet donc un point fixe sur cet ensemble.
(La compacité de $\text{Conv}(\{y_1, ..., y_n\})$ provient du fait que, si on pose $A = \{(t_1, ..., t_n) \in [0;1]^n \text{ tq } t_1 + ... + t_n = 1\}$, alors A est compact et $\text{Conv}(\{y_1, ..., y_n\})$ est l'image de A par l'application $(t_1, ..., t_n) \in A \to t_1 y_1 + ... + t_n y_n$ qui est continue.)
c) Soit x_ϵ le point fixe de la question précédente. Il appartient à C.
$||f(x_\epsilon) - x_\epsilon|| = ||f(x_\epsilon) - \phi(f(x_\epsilon))|| < \epsilon$.
Puisque C est compacte (et incluse dans un espace métrique), on peut extraire de $(x_{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente. Si on note x_∞ la limite de cette sous-suite, alors, par continuité, $||f(x_\infty) - x_\infty|| = 0$ donc $f(x_\infty) = x_\infty$.

3. Notons $C_2 = \overline{\text{Conv}(\overline{f(C)})}$. D'après la question 1., c'est un compact de E. C'est aussi un ensemble convexe.
L'ensemble C_2 est inclus dans C. Restreinte à C_2, l'application f est une application continue d'un convexe compact de E dans lui-même. D'après 2., elle admet donc un point fixe dans C_2, qui est aussi un point fixe dans C.

Exercice 5

On ne peut pas appliquer directement le théorème de Schauder car l'image de T n'est pas nécessairement d'adhérence compacte.

Nous allons définir un opérateur S qui coïncidera avec T sur une boule de rayon assez grand et dont l'image sera d'adhérence compacte.
Soit $R > 0$ tel que $\{x \in E \text{ tq } \exists \lambda \in [0;1], x = \lambda T(x)\} \subset B(0,R)$.
Définissons $S(x) = T\left(\frac{x}{\max(1,||x||/R)}\right)$, pour tout $x \in E$. C'est une application continue car c'est une composée d'applications continues.
Pour tout $x \in E$, $\left|\left|\frac{x}{\max(1,||x||/R)}\right|\right| \leq R$ donc $S(E) \subset T(\overline{B}(0,R))$. D'après (1), $\overline{S(E)}$ est compacte.
Puisque E est un convexe fermé de E, on peut appliquer à S le théorème de Schauder : S admet un point fixe, qu'on note x_0.
On a $||x_0|| < R$. En effet, sinon, $T(Rx_0/||x_0||) = S(x_0) = x_0$, ce qui implique que $\frac{Rx_0}{||x_0||} = \frac{R}{||x_0||}T\left(\frac{Rx_0}{||x_0||}\right)$. Or $0 \leq \frac{R}{||x_0||} \leq 1$ donc, par définition de R, on devrait avoir $R > \left|\frac{Rx_0}{||x_0||}\right| = R$. C'est absurde.
Donc $x_0 = S(x_0) = T(x_0)$ et T admet bien un point fixe.

Exercice 6

1. a) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, e_n la suite dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la n-ème qui vaut 1. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de $l^p(\mathbb{N})$.
En effet, si $x \in l^p(\mathbb{N})$, $\sum\limits_{n\leq N} x_n e_n \to x$ lorsque $N \to +\infty$, ce qui prouve l'existence de la suite $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
Cette suite est unique car, s'il y en a deux, $(\alpha_n(x))$ et $(\beta_n(x))$, on doit avoir :

$$\left|\left|\sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n - \sum_{n\leq N}\beta_n(x)e_n\right|\right|_p \to 0 \qquad \text{quand } N \to +\infty$$

Or :

$$\left|\left|\sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n - \sum_{n\leq N}\beta_n(x)e_n\right|\right|_p^p = \sum_{n\leq N}|\alpha_n(x) - \beta_n(x)|^p$$

On doit donc avoir $\alpha_n(x) = \beta_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Supposons que E admet une base de Schauder (e_n). Posons $A = \{q_1e_1+...+q_Ne_N \text{ tq } q_1,...,q_N \in \mathbb{Q}, N \in \mathbb{N}\}$. C'est un ensemble dénombrable. Montrons que A est dense dans E.
Soit $x \in E$ quelconque. Soit $\epsilon > 0$. Il faut montrer que $A \cap B(x,\epsilon) \neq \emptyset$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\left|x - \sum\limits_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n\right|\right| \leq \epsilon/2$. Soient $q_1,...,q_N \in \mathbb{Q}$ tels que :

$$\left|\left|\sum_{n\leq N} q_n e_n - \sum_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n\right|\right| < \epsilon/2$$

Alors $\left|\left|x - \sum\limits_{n\leq N} q_n e_n\right|\right| < \epsilon$.
Donc A est dense et E est séparable.

L'ensemble $l^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable (voir le corrigé du partiel). Il n'admet donc pas de base de Schauder.

2. a) Pour tout x, $\sum\limits_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n \to x$. On doit donc avoir :

$$||x|| = \lim_{N\to+\infty}\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n\right|\right| \leq \sup_{N\to+\infty}\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n\right|\right| = M(x)$$

Avant de montrer que M est une norme, démontrons que les applications α_n sont linéaires. Soient $x, y \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Puisque $\sum\limits_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n \to x$ et $\sum\limits_{n\leq N}\alpha_n(y)e_n \to y$, on a aussi :

$$\sum_{n\leq N}(\lambda\alpha_n(x) + \mu\alpha_n(y))e_n \to \lambda x + \mu y$$

Puisque la suite $(\alpha_n(\lambda x+\mu y))_{n\in\mathbb{N}}$ est uniquement définie, on doit avoir $\alpha_n(\lambda x+\mu y) = \lambda\alpha_n(x)+\mu\alpha_n(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puisque $\alpha_n(tx) = t\alpha_n(x)$, on a $M(tx) = |t|M(x)$ pour tous $x \in E, t \in \mathbb{R}$.
Puisque $M(x) \geq ||x||$, l'application M est séparante.
Enfin :

$$\begin{aligned}
M(x+y) &= \sup_{N\in\mathbb{N}}\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x+y)e_n\right|\right| \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}}\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n + \sum_{n\leq N}\alpha_n(y)e_n\right|\right| \\
&\leq \sup_{N\in\mathbb{N}}\left(\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n\right|\right| + \left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(y)e_n\right|\right|\right) \\
&\leq \sup_{N\in\mathbb{N}}\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n\right|\right| + \sup_{N\in\mathbb{N}}\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(y)e_n\right|\right| = M(x) + M(y)
\end{aligned}$$

Donc M est une norme
b) Supposons que $(x_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour M. Puisque $M \geq ||.||$, c'est aussi une suite de Cauchy pour $||.||$. Notons x_∞ sa limite au sens de la norme $||.||$ et montrons que c'est aussi la limite pour la norme M.
Pour tous $s, t, N \in \mathbb{N}$:

$$\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x_s)e_n - \sum_{n\leq N}\alpha_n(x_t)e_n\right|\right| \leq M(x_s - x_t)$$

Pour tout N, la suite $(\sum\limits_{n\leq N}\alpha_n(x_s)e_n)_{s\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. Elle converge alors dans E vers une limite qu'on note y_N. Cela implique que, pour tout N, $\alpha_N(x_s)e_N \to y_N - y_{N-1}$ lorsque $s \to +\infty$ et donc que $\alpha_N(x_s)$ converge vers une limite a_N.
Montrons que $\sum\limits_{n\leq N} a_n e_n \to x_\infty$ lorsque $N \to +\infty$.

Soit $\epsilon > 0$. Montrons que, pour tout N assez grand $\left|\left|x_\infty - \sum\limits_{n \le N} a_n e_n\right|\right| \le \epsilon$.
Pour tous $s, N \in \mathbb{N}$:

$$\left|\left|\sum_{n\le N}\alpha_n(x_s)e_n - \sum_{n\le N} a_n e_n\right|\right| = \lim_{t\to+\infty}\left|\left|\sum_{n\le N}\alpha_n(x_s)e_n - \sum_{n\le N}\alpha_n(x_t)e_n\right|\right| \le \lim_{t\to+\infty} M(x_s - x_t)$$

Soit s tel que, pour tout $t \ge s$, $M(x_s - x_t) \le \epsilon/3$. Un tel s existe car $(x_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. De plus, puisque $||x_s - x_\infty|| \to 0$, on peut supposer, quitte à choisir s plus grand, que $||x_s - x_\infty|| \le \epsilon/3$.
Pour tout N assez grand, $\left|\left|x_s - \sum\limits_{n\le N}\alpha_n(x)e_n\right|\right| \le \epsilon/3$. Pour tout N assez grand, on a donc :

$$\begin{aligned}\left|\left|x_\infty - \sum_{n\le N} a_n e_n\right|\right| &\le ||x_\infty - x_s|| + \left|\left|x_s - \sum_{n\le N}\alpha_n(x_s)e_n\right|\right| + \left|\left|\sum_{n\le N}\alpha_n(x_s)e_n - \sum_{n\le N} a_n e_n\right|\right| \\ &\le 2\epsilon/3 + \lim_{t\to+\infty} M(x_s - x_t) \le \epsilon\end{aligned}$$

Donc $\sum\limits_{n\le N} a_n e_n \to x_\infty$ quand $N \to +\infty$. On a donc, pour tout n, $a_n = \alpha_n(x_\infty)$.
Pour tout N :

$$\left|\left|\sum_{n\le N}\alpha_n(x_s)e_n - \sum_{n\le N}\alpha_n(x_\infty)e_n\right|\right| = \lim_{t\to+\infty}\left|\left|\sum_{n\le N}\alpha_n(x_s)e_n - \sum_{n\le N}\alpha_n(x_t)e_n\right|\right| \le \sup_{t\ge s} M(x_s - x_t)$$

Donc $M(x_s - x_\infty) \le \sup\limits_{t\ge s} M(x_s - x_t) \to 0$ quand $s \to +\infty$. La suite $(x_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est donc convergente pour M.
c) L'application Id : $(E, M) \to (E, ||.||)$ est une bijection linéaire entre deux espaces de Banach. Cette application est 1-lipschitzienne (donc continue) d'après la question a). Elle est donc de réciproque continue d'après le théorème de l'isomorphisme. Si K est la norme de la réciproque, on doit avoir, pour tout $x \in E$, $M(x) \le K||x||$.
d) Pour tout n, on note $P_n : x \in E \to \alpha_1(x)e_1 + ... + \alpha_n(x)e_n$. Pour tout n, P_n est continue car :

$$\forall x \in E, \quad ||P_n(x)|| \le M(x) \le K||x||$$

L'application $x \to \alpha_n(x)e_n$ est donc continue : elle est égale à $P_{n+1} - P_n$ et une différence d'applications continues est continue.
L'application α_n est donc aussi continue.
3. a) Soit $F = \mathrm{Im}\,(K)$; c'est par hypothèse un espace de dimension finie. Notons m la dimension de F et $(g_1, ..., g_m)$ une base de F.
Soient $\phi_1, ..., \phi_m : F \to \mathbb{R}$ les applications coordonnées, c'est-à-dire les applications linéaires telles que, pour tout $y \in F$:

$$y = \sum_{n\le m}\phi_n(y)g_n$$

Ces applications sont continues car, en dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues.

Pour toute $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$:

$$K(f) = \sum_{n\leq m} \phi_n(K(f))g_n \tag{1}$$

Pour tout n, l'application $\phi_n \circ K$ est continue (c'est la composée de deux applications continues). D'après le théorème qu'on a admis, il existe μ_n, ν_n deux mesures finies sur $[0;1]$ telles que, pour toute f :

$$\phi_n(K(f)) = \int_0^1 f d\mu_n - \int_0^1 f d\nu_n$$

Avec ces définitions, l'équation (1) donne le résultat demandé.
b) Puisque h_0 est continue, $\{t \in [0;1] \text{ tq } h_0(t) > ||K|| - \epsilon/2\}$. Il existe $]a';b'[\subset [0;1]$ tel que, pour tout $t \in]a';b'[$:

$$h_0(t) \geq ||K|| - \epsilon/2$$

On va choisir a, b tels que $]a;b[\subset]a';b'[$. La première propriété sera alors vérifiée ; il faut montrer qu'on peut aussi satisfaire la deuxième.
Posons $\lambda = \sum_{n\leq m} \mu_n + \nu_n$. C'est une mesure finie sur $[0;1]$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda([0;1]) \geq \lambda(]a';b'[) \geq \sum_{k=0}^{N-1} \lambda\left(\left]a' + k\frac{b'-a'}{N}; a' + (k+1)\frac{b'-a'}{N}\right[\right)$$

Il existe donc k tel que :

$$\lambda\left(\left]a' + k\frac{b'-a'}{N}; a' + (k+1)\frac{b'-a'}{N}\right[\right) \leq \frac{\lambda([0;1])}{N} \tag{2}$$

Choisissons N suffisamment grand pour que :

$$\frac{\lambda([0;1])}{N} \leq \frac{\epsilon}{4mM}$$

Choisissons k comme dans l'inégalité (2) et posons $a = a' + k\frac{b'-a'}{N}, b = a' + (k+1)\frac{b'-a'}{N}$.
Alors on a bien $]a;b[\subset]a';b'[$ et, pour tout n :

$$\mu_n(]a;b[) + \nu_n(]a;b[) \leq \lambda(]a;b[) \leq \frac{\lambda([0;1])}{N} \leq \frac{\epsilon}{4mM}$$

c) On définit f_1 de la manière suivante :
- $f_1(t) = f_0(t)$ si $t \notin]a;b[$
- $f_1(t) = f_0(a)(1 - \frac{2(t-a)}{b-a}) + \frac{2(t-a)}{b-a}$ si $t \in]a;(a+b)/2]$.
- $f_1(t) = f_0(b)(1 - \frac{2(b-t)}{b-a}) + \frac{2(b-t)}{b-a}$ si $t \in](a+b)/2;b[$.

La fonction f_1 vérifie bien les propriétés voulues.

$$\begin{aligned} K(f_1) - K(f_0) &= K(f_1 - f_0) \\ &= \sum_{n=1}^{m} \left(\int_0^1 (f_1 - f_0)d\mu_n - \int_0^1 (f_1 - f_0)d\nu_n\right) g_n \end{aligned}$$

La fonction $f_1 - f_0$ est nulle en-dehors de $]a; b[$ et vérifie $||f_1 - f_0||_\infty \leq ||f_0||_\infty + ||f_1||_\infty \leq 2$. Donc, pour tout n :

$$\left| \int_0^1 (f_1 - f_0) d\mu_n - \int_0^1 (f_1 - f_0) d\nu_n \right| \leq 2 \int_a^b d\mu_n + d\nu_n \leq \frac{\epsilon}{2mM}$$

Ainsi :

$$||K(f_1) - K(f_0)||_\infty \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{\epsilon}{2mM} ||g_n||_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Donc $||f_1 + K(f_1)||_\infty \geq ||f_1 + K(f_0)||_\infty - \frac{\epsilon}{2}$.
D'après la propriété 1. de la question b), $K(f_0)((a+b)/2) = h_0((a+b)/2) \geq ||K|| - \epsilon/2$. Puisque $f_1((a+b)/2) = 1$:

$$||f_1 + K(f_0)||_\infty \geq (f_1 + K(f_0))((a+b)/2) \geq 1 + ||K|| - \frac{\epsilon}{2}$$

Et donc $||f_1 + K(f_1)||_\infty \geq 1 + ||K|| - \epsilon$.
Puisque $||f_1||_\infty = 1$, cela démontre que $||Id + K||_\infty \geq 1 + ||K|| - \epsilon$. Ce résultat étant vrai pour tout ϵ, on a :

$$||Id + K|| \geq 1 + ||K||$$

On a aussi $||Id + K|| \leq 1 + ||K||$ par inégalité triangulaire, donc :

$$||Id + K|| = 1 + ||K||$$

4. a) Pour toute $A \subset \mathbb{N}$ finie, l'application P_A est continue (car chaque α_n est continue, d'après la question 2.). Montrons que, pour tout x, $\sup_{A \subset \mathbb{N} \text{ finie}} ||P_A(x)||_\infty < +\infty$. Comme $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ est un espace de Banach, le théorème de Banach-Steinhaus impliquera que $\sup_{A \subset \mathbb{N} \text{ finie}} ||P_A|| < +\infty$

Supposons par l'absurde qu'il existe x tel que $\sup_{A \subset \mathbb{N} \text{ finie}} ||P_A(x)||_\infty = +\infty$.
Montrons qu'il existe $A_1, A_2, ...$ une partition de $\mathbb{N}$ en sous-ensembles finis telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||P_{A_n}(x)|| \geq 1$$

On va constuire les A_i par récurrence de sorte que, pour tout i, les trois propriétés suivantes soient vérifiées :

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $j < i$.
2. $i \in A_1 \cup ... \cup A_i$
3. $||P_{A_i}(x)|| \geq 1$

Construisons d'abord A_1. À cause de la façon dont x est défini, il existe A un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ tel que :

$$||P_A(x)|| \geq 1 + ||\alpha_1(x) f_1||$$

Si $1 \in A$, on pose $A_1 = A$. Sinon, on pose $A_1 = \{1\} \cup A$. On a alors, par inégalité triangulaire :

$$||P_{A_1}(x)|| \geq ||P_A(x)|| - ||\alpha_1(x) f_1|| \geq 1$$

Supposons maintenant que $A_1, ..., A_i$ ont été construits et montrons qu'on peut construire A_{i+1}. Soit A fini tel que :

$$||P_A(x)|| \geq 1 + ||\alpha_{i+1}(x)f_{i+1}|| + \sum_{j \leq i} \sum_{n \in A_j} ||\alpha_n(x)f_n||$$

On pose $A_{i+1} = (\{i+1\} \cup A) - (A_1 \cup ... \cup A_i)$. L'inégalité triangulaire implique $||P_{A_{i+1}}(x)|| \geq 1$. Cela conlut la récurrence.

On peut donc construire la partition désirée. Notons, pour tout i, n_i le nombre d'éléments de A_i. Soit $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une permutation telle que :

- $\pi(1), ..., \pi(n_1) \in A_1$
- $\pi(n_1+1), ..., \pi(n_2) \in A_2$
- ...

La suite $\left(\sum_{n \leq N} \alpha_{\pi(n)}(x) f_{\pi(n)}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy car, pour tout k :

$$||\sum_{n \leq n_1 + ... + n_{k+1}} \alpha_{\pi(n)}(x) f_{\pi(n)} - \sum_{n \leq n_1 + ... + n_k} \alpha_{\pi(n)}(x) f_{\pi(n)}|| = ||P_{A_{k+1}}(x)|| \geq 1$$

Elle ne peut donc pas converger. C'est en contradiction avec la définition d'une base inconditionnelle.

b) Soit $x \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ quelconque.

Pour tout $M \in \mathbb{N}$, notons $Q_M = P_{(\mathbb{N} - A_0) \cap \{1, ..., M\}}$.

Puisque $(\mathbb{N} - A_0) \cap \{1, ..., M\}$ est finie, $||Q_M(x)|| \leq \beta ||x||$ pour tout $M \in \mathbb{N}$. De plus, à cause de la définition d'une base de Schauder :

$$\begin{aligned}
x - P_{A_0}(x) &= \lim_{M \to +\infty} \sum_{n \leq M} \alpha_n(x) f_n - \sum_{n \in A_0} \alpha_n(x) f_n \\
&= \lim_{(\max A_0) \leq M \to +\infty} \left(\sum_{n \leq M} \alpha_n(x) f_n - \sum_{n \in A_0} \alpha_n(x) f_n \right) \\
&= \lim_{(\max A_0) \leq M \to +\infty} Q_M(x) \\
&= \lim_{M \to +\infty} Q_M(x)
\end{aligned}$$

L'élément $x - P_{A_0}(x)$ est donc la limite d'une suite dont la norme de chaque terme est majorée par $\beta ||x||$. Cela implique :

$$||x - P_A(x)|| \leq \beta ||x||$$

c) L'opérateur $-P_{A_0}$ est de rang fini donc, d'après 3., $||Id - P_{A_0}|| = 1 + ||P_{A_0}||$.

Puisque $||P_{A_0}|| > \beta - \epsilon/2$, $||Id - P_{A_0}|| \geq 1 + \beta - \epsilon/2$.

D'après le résultat de la question b), on a donc $1 + \beta - \epsilon/2 \leq \beta$.

Comme ϵ est quelconque, c'est absurde.