École Normale Supérieure
13 novembre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$7

Exercice 1 : continuité des opérateurs auto-adjoints

Soit H un espace de Hilbert. Soit $T : H \to H$ une application linéaire telle que, pour tous $x, y \in H$:

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$$

Démontrer que T est continue.

Exercice 2 : bases hilbertiennes

Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace de Hilbert séparable, de dimension infinie.

1. Montrer qu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

   1. $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ pour tous $n \neq m$
   2. $||e_n|| = 1$ pour tout n
   3. $\overline{\text{Vect}\,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = E$

2. Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe une unique suite $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, telle que :

$$x = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n\leq N} \alpha_n(x) e_n$$

Que valent les $\alpha_n(x)$?

3. Montrer que l'application $\phi : x \in E \to (\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est un isomorphisme de E vers $l^2(\mathbb{N})$.

Exercice 3 : hyperplan fermé d'orthogonal réduit à {0}

1. Soit $c_{00}(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles qui valent zéro à partir d'un certain rang. On munit cet ensemble du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$.

a) L'espace $c_{00}(\mathbb{N})$ est-il un espace de Hilbert ?
b) Soit :

$$f : u \in c_{00}(\mathbb{N}) \to \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{2^n}$$

Montrer que $\text{Ker}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $c_{00}(\mathbb{N})$, tel que $(\text{Ker}\,(f))^\perp = \{0\}$.

2. Soit E un espace pré-hilbertien non-complet quelconque. Montrer que E contient un sous-espace vectoriel fermé F tel que $F \neq E$ et $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 4 : opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit H un espace de Hilbert.

On rappelle que si A est un opérateur continu de H dans lui-même, on appelle *adjoint de* A l'opérateur A^* tel que :

$$\forall x, y \in H, \qquad \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$$

1. Soient $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$ deux bases hilbertiennes de H. Montrer que, pour tout opérateur linéaire continu A de H dans lui-même, on a

$$\sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2 = \sum_{j\in J} \|A^* f_j\|^2.$$

En déduire que, si A est un opérateur linéaire de H dans lui-même, la quantité

$$\|A\|_{\mathcal{HS}} := \left(\sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

est indépendante du choix de la base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$. Lorsque cette quantité est finie, on dit que A est un *opérateur de Hilbert-Schmidt*. On notera $\mathcal{HS}(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H.

2. Montrer que $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ définit une norme sur $\mathcal{HS}$, et que l'on a $\|A\|_{\mathcal{HS}} \geq |||A|||$ pour tout A.

3. Si A et B sont deux opérateurs continus, montrer que l'opérateur $A\circ B$ est de Hilbert-Schmidt dès que l'un des opérateurs A ou B est de Hilbert-Schmidt.

4. Montrer que $\mathcal{HS}(H)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$, est un espace de Hilbert.

5. Montrer que tout opérateur de rang fini est de Hilbert-Schmidt. Montrer que les opérateurs de rang fini sont denses dans $\mathcal{HS}(H)$ (pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$).

On suppose maintenant que $H = L^2(X,\mu)$ où μ est une mesure σ-finie sur un espace mesurable $(X,\mathcal{B})$. Pour $K \in L^2(X\times X, \mu\otimes\mu)$, on considère l'opérateur sur H défini par

$$A_K(f)(x) := \int_X K(x,y) f(y) d\mu(y).$$

[Une mesure σ-finie est une mesure pour laquelle X peut s'écrire comme une union de sous-ensembles de mesure finie. Cette propriété permet d'appliquer le théorème de Fubini.]

6. Vérifier que A_K est un opérateur linéaire continu de H dans lui-même, pour tout $K \in L^2(X\times X, \mu\otimes\mu)$. À quelle condition est-il auto-adjoint ?

7. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Montrer que la famille $(e_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ définie par $e_{i,j}(x,y) = e_i(x)e_j(y)$ est une base hilbertienne de $L^2(X\times X, \mu\otimes\mu)$.

8. En utilisant les bases hilbertiennes $(e_i)_{i\in I}$ et $(e_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$, montrer que

$$\|A_K\|_{\mathcal{HS}} = \|K\|_{L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)}$$

pour $K \in L^2(X\times X, \mu\otimes\mu)$. En particulier, A_K est un opérateur de Hilbert-Schmidt pour tout $K \in L^2(X\times X, \mu\otimes\mu)$.

9. Réciproquement, montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt $A \in \mathcal{HS}(H)$ est de la forme A_K pour un certain $K \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$.

L'application $K \mapsto A_K$ définit donc une bijection isométrique entre $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ et $\mathcal{HS}(H)$.

Exercice 5 : dual de l^p

Soit $p \in [1; +\infty]$. Soit $q \in [1; +\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Pour tout $v \in l^q$, on définit :

$$\begin{aligned} L_v : l^p &\to \mathbb{R} \\ u &\to \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \end{aligned}$$

1. a) Montrer que, pour tout $v \in l^q$, L_v est une forme linéaire bien définie et continue sur l^p.
[Indication : on rappelle l'inégalité de Hölder : pour toutes $u \in l^p, v \in l^q$, on a $||uv||_1 \leq ||u||_p ||v||_q$.]
b) Montrer que $\phi : v \in l^q \to L_v \in (l^p)'$ réalise une isométrie vers son image.

2. Montrer que ϕ est une isométrie (surjective) de l^q vers $(l^p)'$ si $p \neq \infty$.

3. a) On suppose maintenant $p = \infty$.
Montrer qu'il existe $L \in (l^\infty)'$ une forme linéaire continue telle que, pour toute $u \in l^\infty$ convergente, on ait :

$$L(u) = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

[Indication : une conséquence du théorème de Hahn-Banach affirme qu'une forme linéaire continue sur un sous-espace d'un espace vectoriel normé peut être prolongée en une forme linéaire continue sur l'espace normé tout entier (voir TD 5).]
b) En déduire que ϕ n'est pas surjective si $p = \infty$.

Exercice 6 : topologies faible et faible-étoile

1. Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. On appelle *topologie forte* la topologie sur E engendrée par la norme $||.||$. On note E' l'ensemble des formes linéaires continues sur E.
On appelle *topologie faible* sur E la topologie la moins fine pour laquelle tous les éléments de E' sont des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$.
a) Montrer qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers x_∞ pour la topologie faible si et seulement si $l(x_n) \overset{n \to +\infty}{\to} l(x_\infty)$ pour toute $l \in E'$.
b) Donner un exemple d'une suite d'éléments de $(l^2(\mathbb{N}), ||.||_2)$ qui converge pour la topologie faible mais pas pour la topologie forte.
c) Montrer que la topologie faible et la topologie forte de E sont égales si et seulement si E est de dimension finie.

2. On appelle *topologie faible-étoile* sur E' la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $\phi_x : f \in E' \to f(x) \in \mathbb{R}$, où x varie dans E.
a) Montrer que la topologie faible-étoile est moins fine que la topologie de la norme uniforme.
b) On note B la boule unité fermée de E' pour la norme uniforme.

Montrer que, si on munit B de la topologie faible-étoile et $\mathcal{F}(B_E(0,1),[-1;1])$ de la topologie produit, alors l'application suivante est d'image fermée et réalise un homéomorphisme sur son image :

$$\Gamma : f \in B \quad \to f_{|B_E(0,1)} \in \mathcal{F}(B_E(0,1),[-1;1])$$

c) [Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki] En déduire que B est compact pour la topologie faible-étoile.

Exercice 7 : espaces réflexifs

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. On note E' son dual topologique (l'ensemble des formes linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$) et E'' le dual topologique de E'.
Soit $J : E \to E''$ l'application telle que $J(x)(l) = l(x)$ pour toute $l \in E'$.

1. Montrer que J est une isométrie vers son image.

2. On dit que E est réflexif si J réalise un isomorphisme de E vers E'' (c'est-à-dire, vue la question précédente, si J est surjective).
[Attention, il ne suffit pas, pour que E soit réflexif, que E et E'' soient isométriques. Il existe des espaces isométriques à leur dual tels que J n'est pas une isométrie.]
a) Montrer que tout espace de Hilbert est réflexif.
b) Pour quelles valeurs de p l'espace l^p est-il réflexif ?
[Indication : utiliser l'exercice 5.]