École Normale Supérieure
13 novembre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$7

Corrigé

Exercice 1

Solution à l'aide du théorème du graphe fermé : Montrons que $\{(x, T(x)), x \in H\}$ est un sous-ensemble fermé de H^2.

Supposons que $x_n \to x_\infty$ et $T(x_n) \to y_\infty$. Il faut montrer que (x_∞, y_∞) appartient au graphe, c'est-à-dire que $y_\infty = T(x_\infty)$.

Pour tout $z \in H$, $\langle T(x_n), z\rangle \to \langle y_\infty, z\rangle$. De plus, $\langle T(x_n), z\rangle = \langle x_n, T(z)\rangle \to \langle x_\infty, T(z)\rangle = \langle T(x_\infty), z\rangle$. Cela implique que $\langle y_\infty, z\rangle = \langle T(x_\infty), z\rangle$. Puisque c'est vrai pour tout $z \in H$, $y_\infty = T(x_\infty)$.

Solution à l'aide du théorème de Banach-Steinhaus : Pour tout y, l'application $x \to \langle T(x), y\rangle$ est linéaire et continue. En effet, pour tout x, $|\langle T(x), y\rangle| = |\langle x, T(y)\rangle| \leq ||x||.||T(y)||$.

De plus, pour tout x, $\sup\limits_{||y|| \leq 1} |\langle T(x), y\rangle| = ||T(x)|| < +\infty$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, la famille $\{x \to \langle T(x), y\rangle\}_{||y|| \leq 1}$ est donc bornée dans l'ensemble des fonctions linéaires continues de H dans lui-même. Il existe donc $C > 0$ tel que, pour tout $x \in H$ et tout $y \in B_H(0, 1)$:

$$|\langle T(x), y\rangle| \leq C||x||$$

Puisque c'est vrai pour tout y tel que $||y|| \leq 1$, cela entraîne $||T(x)|| \leq C||x||$. L'application T est donc continue.

Exercice 2

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense d'éléments de E.

On a $\overline{\text{Vect}\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = E$, puisque la famille est dense. Quitte à supprimer les x_n tels que $x_n \in \text{Vect}\,\{x_0, ..., x_{n-1}\}$, ce qui ne change rien à la véracité de cette propriété, on peut supposer que $(x_0, ..., x_n)$ est une famille libre pour tout n.

On définit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en orthonormalisant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la méthode de Gram-Schmidt :

$$e_n = \frac{x_n - \langle x_n, e_{n-1}\rangle e_{n-1} - ... - \langle x_n, e_0\rangle e_0}{||x_n - \langle x_n, e_{n-1}\rangle e_{n-1} - ... - \langle x_n, e_0\rangle e_0||}$$

Les propriétés 1. et 2. sont alors vérifiées. La propriété 3. l'est aussi car $\text{Vect}\,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \text{Vect}\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Montrons l'existence. On va montrer en fait que :

$$\sum_{n \leq N} \langle x, e_n\rangle e_n \to x \qquad \text{quand } N \to +\infty$$

En effet, pour tout N, $\sum\limits_{n\leq N}\langle x,e_n\rangle e_n$ est la projection de x sur $\mathrm{Vect}\,\{e_0,...,e_N\}$ donc :

$$\left|\left|x-\sum_{n\leq N}\langle x,e_n\rangle e_n\right|\right| = d(x, \mathrm{Vect}\,\{e_0,...,e_N\})$$

Comme $E = \overline{\mathrm{Vect}\,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$, on a que $d(x, \mathrm{Vect}\,\{e_0,...,e_N\}) \to 0$ quand $N \to +\infty$. Donc $\sum\limits_{n\leq N}\langle x,e_n\rangle e_n \to x$.
Montrons maintenant l'unicité, c'est-à-dire montrons qu'on a nécessairement $\alpha_n(x) = \langle x,e_n\rangle$ pour tout n.
Puisque $\sum\limits_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n \to x$ et $\sum\limits_{n\leq N}\langle x,e_n\rangle e_n \to x$, on doit avoir :

$$\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n - \sum_{n\leq N}\langle x,e_n\rangle e_n\right|\right| \to 0$$

Puisque $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée :

$$\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n - \sum_{n\leq N}\langle x,e_n\rangle e_n\right|\right| = \sqrt{\sum_{n\leq N}|\alpha_n(x)-\langle x,e_n\rangle|^2}$$

La convergence de ce nombre vers 0 implique que $\alpha_n(x) = \langle x,e_n\rangle$ pour tout n.
3. Cette application est linéaire. Il faut montrer que c'est une isométrie et qu'elle est surjective.
Montrons que c'est une isométrie.
Pour tout $x\in E$:

$$\begin{aligned}||x|| &= \lim_{N\to+\infty}\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n\right|\right| \\ &= \lim_{N\to+\infty}\sqrt{\sum_{n\leq N}|\alpha_n(x)|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n(x)|^2} \\ &= ||(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}||_2 = ||\phi(x)||_2\end{aligned}$$

Montrons que ϕ est surjective.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$. Posons $u_N = \sum\limits_{n\leq N}x_ne_n$ pour tout $N\in\mathbb{N}$. La suite (u_N) est de Cauchy. En

effet, pour tous N, M avec $N < M$:

$$\begin{aligned} ||u_N - u_M|| &= \left|\left| \sum_{n=N+1}^{M} x_n e_n \right|\right| \\ &= \sqrt{\sum_{n=N+1}^{M} x_n^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=N+1}^{+\infty} x_n^2} \\ &\to 0 \quad \text{quand } N \to +\infty \end{aligned}$$

On peut donc poser $x = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n\leq N} x_n e_n$. On a $\phi(x) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

1. a) Non. Il est seulement préhilbertien. En effet, soit, pour tout n, $u_n = 2^{-n}\delta_n$ (c'est-à-dire la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui vaut 2^{-n}).
Pour tout n, $||u_n|| = 2^{-n}$ donc la suite $\sum\limits_n u_n$ est normalement convergente : $\sum\limits_n ||u_n|| = 2 < +\infty$.
Pourtant, $\left(\sum\limits_{n\leq N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $c_{00}(\mathbb{N})$: si elle admettait une limite u_∞, la coordonnée n de u_∞ devrait être égale à 2^{-n} pour tout n donc u_∞ ne serait pas nulle à partir d'un certain rang.
b) L'application f est continue. En effet, pour tout u, par Cauchy-Schwarz :

$$|f(u)| = \left|\sum_n \frac{u_n}{2^n}\right| \leq \sqrt{\left(\sum_n u_n^2\right)}.\sqrt{\left(\sum_n 2^{-2n}\right)} = \sqrt{\frac{4}{3}}||u||$$

L'ensemble $\mathrm{Ker}\,(f) = f^{-1}(\{0\})$ est donc fermé dans $c_{00}(\mathbb{N})$.
Montrons que $(\mathrm{Ker}\,(f))^\perp = \{0\}$. Soit $u \in (\mathrm{Ker}\,(f))^\perp$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ pour tout $n > N$.
Définissons $v \in c_{00}(\mathbb{N})$ de la manière suivante :
- Pour tout $n \leq N$, $v_n = u_n$.
- $v_{N+1} = -2^{N+1}.\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} v_n\right)$
- Pour tout $n > N+1$, $v_n = 0$.

La suite v appartient au noyau de f :

$$f(v) = \sum_{n\leq N} 2^{-n} v_n + 2^{-(N+1)} v_{N+1} = 0$$

La suite v est donc orthogonale à u :

$$0 = \langle u, v\rangle = \sum_{n\leq N} u_n v_n = ||u||^2$$

Donc $u = 0$.
2. Soit E_c le complété de E, qui est un espace de Hilbert. Soit $x_0 \in E_c - E$. Posons $F_c = \{x_0\}^\perp$ et $F = E \cap F_c$. Puisque F_c est fermé dans E_c, F est fermé dans E.
Montrons que $F^\perp = \{0\}$ dans E. Soit, par l'absurde, $u \in F^\perp$ tel que $u \neq 0$. On n'a pas $\langle u, x_0\rangle = 0$, sinon on aurait $u \in F$ donc $u \perp u$. Pour tout $v \in E$, $v - \frac{\langle v,x_0\rangle}{\langle u,x_0\rangle} u \perp x_0$ donc :

$$\left(\langle u, v - \frac{\langle v, x_0\rangle}{\langle u, x_0\rangle} u\rangle = 0\right) \Rightarrow \left(\langle v, \frac{\langle u, x_0\rangle}{||u||^2} u\rangle = \langle v, x_0\rangle\right)$$

Comme E est dense dans E_c, la dernière égalité est en fait vraie pour tout $v \in E_c$, ce qui implique :

$$\frac{\langle u, x_0\rangle}{||u||^2} u = x_0$$

C'est impossible car $x_0 \notin E$ et $u \in E$.

Exercice 4

1. Remarquons d'abord (c'est une conséquence des propriétés vues à l'exercice 2) que, pour tout $x \in H$, $||x||^2 = \sum_i \langle x, e_i\rangle^2 = \sum_j \langle x, f_j\rangle^2$.
$\sum_{i\in I} ||Ae_i||^2 = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in J} \langle Ae_i, f_j\rangle^2\right) = \sum_{i\in I, j\in J} \langle e_i, A^* f_j\rangle^2 = \sum_{j\in J} ||A^* f_j||^2$
Si $(e_i), (e'_i)$ sont deux bases hilbertiennes et (f_j) une troisième base, quelconque, on a :

$$\sum_i ||Ae_i||^2 = \sum_j ||A^* f_i||^2 = \sum_i ||Ae'_i||^2$$

donc la quantité voulue est bien indépendante de la base.
2. L'inégalité triangulaire est vérifiée car $||.||_2$ la vérifie. L'application est homogène. Si on montre que $||.||_{\mathcal{HS}} \geq |||A|||$, on aura aussi qu'elle est séparante.
Soit (e_i) une base hilbertienne. Soit x quelconque. On a $x = \sum_i \langle x, e_i\rangle e_i$.
On a $||A(x)|| \leq \sum_i |\langle x, e_i\rangle|.||A(e_i)|| \leq \left(\sum_i |\langle x, e_i\rangle|^2\right)^{1/2} . \left(\sum_i ||Ae_i||^2\right)^{1/2} = ||x||.||A||_{\mathcal{HS}}$. Comme c'est vrai pour tout x, $|||A||| \leq ||A||_{\mathcal{HS}}$.
3. Si B est de Hilbert-Schmidt, $||A \circ B||_{\mathcal{HS}} \leq |||A|||.||B||_{\mathcal{HS}} < +\infty$ donc $A \circ B$ est de Hilbert-Schmidt.
D'après la première question, un opérateur est de Hilbert-Schimdt si et seulement si son adjoint l'est. Donc si A est de Hilbert-Schmidt, A^* aussi et $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$ aussi, d'après ce qu'on vient de voir. Donc $A \circ B$ est de Hilbert-Schmidt.
4. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne fixée. L'application bilinéaire $\langle A, B\rangle = \sum_i \langle Ae_i, Be_i\rangle$ est un produit scalaire dont la norme associée est $||.||_{\mathcal{HS}}$. Donc $\mathcal{HS}(H)$ est préhilbertien. Montrons qu'il est complet.
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour $||.||_{\mathcal{HS}}$, c'est aussi une suite de Cauchy pour $|||.|||$ d'après la question 2. Elle converge donc au sens de la norme opérateur, vers une limite A_∞. Montrons qu'elle converge vers A_∞ pour $||.||_{\mathcal{HS}}$.

Pour tout i, $A_n e_i \to A_\infty e_i$. De plus, pour tout n et tout N :

$$\begin{aligned}\sum_{i\leq N}||(A_n - A_\infty)e_i||^2 &= \lim_{m\to+\infty}\sum_{i\leq N}||(A_n - A_m)e_i||^2\\ &\leq \sup_{m\geq n}||A_n - A_m||^2_{\mathcal{HS}}\end{aligned}$$

Donc $\sum_i ||(A_n - A_\infty)e_i||^2 \leq ||A_n - A_m||^2_{\mathcal{HS}} < +\infty$. Cela implique que $A_\infty \in \mathcal{HS}(H)$ et $||A_n - A_\infty||_{\mathcal{HS}} \to 0$.

5. Soit A de rang fini. Alors $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ est de dimension finie (de même dimension que l'image). Notons d la dimension. On peut choisir $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne telle que $e_1, ..., e_d$ forment une base de $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ et $e_k \in \operatorname{Ker} A$ pour tout $k > d$.

Alors $||A||_{\mathcal{HS}} = \sum_i ||Ae_i||^2 = \sum_{i\leq d}||Ae_i||^2 < +\infty$.

Montrons maintenant la densité des opérateurs de rang fini. Soit $A \in \mathcal{HS}(H)$ et soit $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe B de rang fini tel que $||A - B||_{\mathcal{HS}} \leq \epsilon$.

Soit N tel que $\sum_{i>N}||Ae_i||^2 \leq \epsilon^2$.

Posons B l'opérateur qui est égal à A sur $\operatorname{Vect}\{e_1, ..., e_N\}$ et égal à 0 sur $\operatorname{Vect}\{\{\}e_1, ..., e_N\}^\perp$.

L'opérateur B est de rang fini : son image est engendrée par $B(e_1), ..., B(e_N)$. De plus :

$$||A - B||_{\mathcal{HS}} = \sqrt{\sum_{i>N}||Ae_i||^2} \leq \epsilon$$

6. Pour presque tout $x \in X$, $K(x, .) \in L^2(X, \mu)$ donc, par l'inégalité de Hölder, $A_K(f)(x)$ est bien définie pour presque tout x. Nous allons voir dans la suite qu'il s'agit de plus d'une fonction de $L^2(X, \mu)$.

A_K est linéaire. De plus, pour tout x et toute f, $|A_K(f)(x)| \leq ||K(x, .)||_2||f||_2$, par l'inégalité de Hölder.

Donc, pour toute f, $||A_K(f)||_2 = \int_{x\in X}|A_K(f)(x)|^2 \leq \int_{x,y\in X}|K(x,y)|^2||f||_2^2 d\mu(x)d\mu(y) = ||K||_2^2||f||_2^2$.

L'opérateur A_K est donc continu, de norme inférieure ou égale à $||K||_2$.

Pour toute g :

$$\begin{aligned}\int_X A_K(f)(x)g(x)d\mu(x) &= \int_{x,y\in X}K(x,y)f(y)g(x)d\mu(x)d\mu(y)\\ &= \int_{y\in X}f(y)\left(\int_{x\in X}K(x,y)g(x)d\mu(x)\right)d\mu(y)\end{aligned}$$

On en déduit que l'adjoint de A_K est l'opérateur $g \to (x \to \int_X K(y,x)g(y)d\mu(y))$. Les deux opérateurs sont égaux si et seulement si K est symétrique.

7. Le calcul des intégrales montre que cette famille est orthonormée : $\langle e_{i,j}, e_{k,l}\rangle = \langle e_i, e_k\rangle\langle e_j, e_l\rangle$. Il faut montrer que c'est une base. Pour cela, il suffit de montrer que son orthogonal est réduit à $\{0\}$.

Soit $f \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ tel que $\langle f, e_{i,j}\rangle = 0$ pour tous i, j. On va montrer que $f = 0$.

Les fonctions $f(., y)$ et $f(x, .)$ sont dans L^2 pour presque tous x, y. Quitte à modifier f sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer qu'elles sont dans L^2 pour tous x, y.

Pour tout j, la fonction $f_j : x \to \int_X f(x,y)e_j(y)d\mu(y)$ est dans L^2. De plus, $\langle f_j, e_i\rangle = \langle f, e_{i,j}\rangle = 0$ pour tous i,j. Donc, pour tout j, $f_j = 0$ presque partout (car $(e_i)_i$ est une base). Donc, pour presque tout x, $\langle f(x,.), e_j\rangle = f_j(x) = 0$ pour tout j. Puisque $(e_j)_j$ est une base, cela implique que $f(x,.) = 0$ presque partout pour presque tout x. Donc $f = 0$ presque partout.

8.

$$\begin{aligned} ||A_K||^2_{\mathcal{HS}} &= \sum_i ||A_K(e_i)||^2 \\ &= \sum_{i,j} \langle A_K(e_i), e_j\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle K, e_{i,j}\rangle^2 \\ &= ||K||^2_{L^2} \end{aligned}$$

9. Soit A un opérateur de Hilbert-Schmidt.
Pour $(i,j) \in I^2$, notons $k_{i,j} := \langle Ae_i, e_j\rangle$. On a alors

$$\sum_{(i,j)\in I^2} |k_{i,j}|^2 = \sum_{(i,j)\in I^2} \langle Ae_i, e_j\rangle^2 = \sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2 = \|A\|^2_{\mathcal{HS}} < +\infty.$$

Puisque la famille $(e_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ est orthonormée dans $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$, ceci entraîne que la fonction

$$K = \sum_{(i,j)\in I^2} k_{i,j} e_{i,j}$$

est dans $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$.
Pour tous $i,j \in I^2$, $\langle A_K(e_i), e_j\rangle = k_{i,j} = \langle Ae_i, e_j\rangle$. Puisque $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de $L^2(X,\mu)$, cela implique que A_K et A sont égaux.

Exercice 5

1. a) La fonction L_v est bien définie car, si $v \in l^q$ et $u \in l^p$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| = ||uv||_1 \leq ||u||_p ||v||_q$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ converge donc absolument. De plus, sa limite vérifie :

$$|L_v(u)| \leq ||u||_p ||v||_q$$

L'application L_v est donc bien définie et continue : elle est de norme au plus $||v||_q$.
b) On traite le cas $p \neq 1, +\infty$. Les cas $p = 1$ ou $p = \infty$ sont similaires.
Montrons que, pour tout v, $||L_v|| = ||v||_q$. Si $v = 0$, c'est clair. On peut donc supposer $v \neq 0$. On a vu à la question précédente qu'on avait $||L_v|| \leq ||v||_q$.
Posons $u_n = |v_n|^{q-1}\text{signe}(v_n)$. Cette suite est dans l^p car $\sum_n |u_n|^p = \sum_n |v_n|^q = ||v||_q^q$. On a $||u||_p = ||v||_q^{q/p} = ||v||_q^{q-1}$.

On a $L_v(u) = \sum_n |v_n|^q = ||v||_q^q = ||v||_q ||u||_p$. Donc $||L_v|| \geq ||v||_q$.

2. À cause de la question 1.b), il suffit de montrer que ϕ est surjective si $p \neq \infty$.
Soit $\alpha \in (l^p)'$ quelconque et montrons que $\alpha = L_v$ pour un certain v.
Pour tout n, on note $e^{(n)}$ la suite de l^p telle que :

$$\begin{aligned} e_k^{(n)} &= 0 \text{ si } k \neq n \\ &= 1 \text{ si } k = n \end{aligned}$$

Posons $v_n = \alpha(e^{(n)})$. La suite v ainsi définie est un élément de l^q. En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$, si on note $u = |v_0|^{q-1}\text{signe}(v_0)e_0 + ... + |v_N|^{q-1}\text{signe}(v_N)e_N$:

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|^q &= \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(|v_n|^{q-1}\text{signe}(v_n)) \\ &= \alpha(u) \\ &\leq ||\alpha||\,||u||_p \\ &= ||\alpha|| \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|^q\right)^{1-1/q} \end{aligned}$$

donc $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|^q\right)^{1/q} \leq ||\alpha||$. (Le raisonnement qui précède n'est valable que si $p \neq 1$ mais il s'adapte au cas $p = 1$ et donne le même résultat.)
Les fonctions α et L_v coïncident sur Vect $\{e^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Comme cet ensemble est dense dans l^p, on doit avoir $\alpha = L_v$.

3. a) Soit $V \subset l^\infty$ le sous-espace vectoriel constitué des suites convergentes. Soit $L : V \to \mathbb{R}$ l'application telle que $L(u) = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
L'application L est continue sur V car $||L(u)|| \leq ||u||_\infty$ pour tout u. On peut donc, par le théorème de Hahn-Banach, la prolonger sur l^∞ en une forme linéaire continue, qu'on note toujours L.
b) L'application L n'est pas de la forme L_v. En effet, si on définit $(e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ comme précédemment, on a $L(e^{(n)}) = 0$ pour tout n. La seule v pour laquelle $L_v(e^{(n)}) = 0$ pour tout n est $v = 0$. Mais si $v = 0$, on a $L_v = 0 \neq L$.

Exercice 6

1. a) Si $x_n \to x_\infty$ pour la topologie faible, alors $l(x_n) \to l(x_\infty)$ pour toute $l \in E'$ car l est continue pour la topologie faible, par définition de cette topologie.

Montrons la réciproque. Supposons que $l(x_n) \to l(x_\infty)$ pour toute $l \in E'$.
La topologie faible est la topologie engendrée par les ensembles de la forme $l^{-1}(U)$, pour $l \in E'$ et U un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, pour tous l, U, $l^{-1}(U)$ doit être un ouvert de la topologie faible, car l est continue pour cette topologie. Donc la topologie faible contient celle engendrée par les $l^{-1}(U)$.
De plus, toutes les $l \in E'$ sont continues pour la topologie engendrée par les ensembles de la forme $l^{-1}(U)$. Comme la topologie faible est la topologie la moins fine vérifiant cette propriété, les deux topologies coïncident.

Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des ouverts U de la topologie faible tels que, si $x_\infty \in U$, alors $x_n \in U$ pour tout n assez grand.
Cette famille $\mathcal{A}$ contient chaque $l^{-1}(U)$ car, si $x_\infty \in l^{-1}(U)$, alors $l(x_\infty) \in U$ donc $l(x_n) \in U$ pour tout n assez grand (car $l(x_n) \to l(x_\infty)$) et $x_n \in l^{-1}(U)$ pour tout n assez grand.
On peut vérifier que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie et par union. L'ensemble $\mathcal{A}$ contient donc la topologie engendrée par les ouverts de la forme $l^{-1}(U)$. Comme ces ouverts engendrent la topologie faible, $\mathcal{A}$ contient tous les ouverts de la topologie faible.
Donc pour tout Ω ouvert de la topologie faible, si $x_\infty \in \Omega$, $x_n \in \Omega$ pour tout n assez grand, c'est-à-dire que $x_n \to x_\infty$.
b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} e_k^{(n)} &= 0 \text{ si } k \neq n \\ &= 1 \text{ si } k = n \end{aligned}$$

La suite $(e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy. Elle ne converge donc pas fortement.
Montrons en revanche qu'elle converge faiblement vers 0. Soit $l \in (l^2(\mathbb{N}))'$. Puisque $l^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert, il existe $v \in l^2(\mathbb{N})$ telle que, pour toute $u \in l^2(\mathbb{N})$:

$$l(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$$

Alors $l(e^{(n)}) = v_n \to 0$.
D'après la question a), cela implique que $e^{(n)} \to 0$ pour la topologie faible.
c) Si E est de dimension infinie, les deux topologies sont différentes. En effet, aucun ouvert non-vide de la topologie faible n'est borné pour la norme : d'après le raisonnement effectué à la question a), les ouverts de la topologie faible sont des unions d'ouverts de la forme

$$l_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap l_n^{-1}(U_n)$$

où les $l_1, \ldots, l_n$ appartiennent à E' et les $U_1, \ldots, U_n$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
Or les ensembles de la forme $l_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap l_n^{-1}(U_n)$ sont soit vides soit non-bornés. En effet, s'ils contiennent un point x_0, ils contiennent également $x_0 + \mathrm{Ker}\,(l_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}\,(l_n)$. Si E est de dimension infinie, $\mathrm{Ker}\,(l_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}\,(l_n)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension infinie ; c'est donc un ensemble non-borné pour la norme $||.||$.
La topologie faible est donc strictement moins fine que la topologie forte.

Montrons maintenant que les topologies faible et forte coïncident si E est de dimension finie.
On peut alors supposer que $E = \mathbb{R}^s$ pour un certain $s \in \mathbb{N}$.
L'application $Id : (\mathbb{R}^s, \text{top. faible}) \to (\mathbb{R}^s, \text{top. forte})$ est continue, car chacune de ses coordonnées est une forme linéaire, donc continue pour la topologie faible. De plus, la réciproque de cette application est continue : la topologie faible est toujours moins fine que la topologie forte. Donc cette application réalise un homéomorphisme entre E muni de ses topologies faible et forte. Donc les deux topologies sont égales.

2. a) Pour la topologie de la norme uniforme, ϕ_x est continue pour tout x. En effet, $|\phi_x(f)| = |f(x)| \leq ||f||\,||x||$ pour toute f donc $||\phi_x|| \leq ||x||$.
b) Montrons d'abord que l'image est fermée. L'image est constituée de toutes les fonctions de $B_E(0,1)$ vers $[-1;1]$ qui sont linéaires, c'est-à-dire qui vérifient les conditions suivantes :

- $\forall x \in B_E(0,1), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\lambda x \in B_E(0,1), f(\lambda x) = \lambda f(x)$
- $\forall x, y \in B_E(0,1)$ tq $x + y \in B_E(0,1), f(x+y) = f(x) + f(y)$

Cette image s'écrit donc comme une intersection d'antécédants de fermés par des applications linéaires continues. C'est donc un fermé.
L'application Γ est continue car, si on la compose avec n'importe laquelle des projections qui définissent la topologie produit sur $\mathcal{F}(B_E(0,1), [-1;1])$, on obtient une application de la forme ϕ_x, avec $x \in B_E(0,1)$, ce qui est une application continue sur B muni de la topologie faible-étoile.
Elle est injective : si $\Gamma(f) = \Gamma(g)$, alors f et g coïncident sur $B_E(0,1)$, donc sont égales sur tout E.
La fonction Γ admet donc une réciproque sur son image, qu'on note Δ. Montrons que Δ est continue.
De la même façon qu'à la question 1.a), on voit que la topologie faible-étoile est la topologie engendrée par les ouverts de la forme $\phi_x^{-1}(U)$, avec $x \in E$ et U un ouvert de $\mathbb{R}$.
Il suffit de montrer que l'antécédant par Γ^{-1} d'un ouvert de cette forme est un ouvert de l'image de Γ. Ensuite, on pourra poser $\mathcal{A}$ l'ensemble des ouverts de la topologie faible-étoile dont l'antécédant par Γ^{-1} est un ouvert. Cette famille étant stable par intersection finie et par union, si elle contient une famille génératrice de la topologie faible-étoile, elle contiendra toute la topologie faible-étoile.
Soient donc $x \in E$ et U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrons que $(\Gamma^{-1})^{-1}(\phi_x^{-1}(U) \cap B)$ est un ouvert de l'image de Γ.
Si $x \in B_E(0,1)$, $(\Gamma^{-1})^{-1}(\phi_x^{-1}(U) \cap B) = \{f \in \operatorname{Im}\Gamma \text{ tq } f(x) \in U\} = (\operatorname{Im}\Gamma) \cap \pi_x^{-1}(U)$, si on note π_x la projection canonique de $\mathcal{F}(B_E(0,1), [-1,1])$ sur la coordonnée x. C'est donc un ouvert de $\operatorname{Im}\Gamma$, par définition de la topologie produit.
Si $x \notin B_E(0,1)$, $(\Gamma^{-1})^{-1}(\phi_x^{-1}(U) \cap B) = \{f \in \operatorname{Im}\Gamma \text{ tq } f(x/(2||x||)) \in U/(2||x||)\} = (\operatorname{Im}\Gamma) \cap \pi_{x/(2||x||)}^{-1}(U/(2||x||))$ (en notant $U/(2||x||)$ l'ensemble des $u/(2||x||)$ tels que $u \in U$). C'est aussi un ouvert.
c) L'ensemble $\mathcal{F}(B_E(0,1), [-1;1])$ est compact, d'après le théorème de Tychonov. L'image de B par Γ est donc également compacte car on a vu qu'elle était fermée. Puisque Γ réalise un homéomorphisme de B sur son image, B est compacte.

Exercice 7

1. Pour tout x, $||J(x)|| \leq ||x||$. En effet, pour toute $l \in E'$, $||J(x)(l)|| = |l(x)| \leq ||x||\,||l||$.
De plus, d'après le théorème de Hahn-Banach, pour tout x, il existe $l \in E'$ telle que $l(x) = ||x||$ et $||l|| = 1$. Pour une telle l, $J(x)(l) = ||x||\,||l||$ donc $||J(x)|| \geq ||x||$.
Donc $||J(x)|| = ||x||$.

2. a) Soit E un espace de Hilbert. Notons $\phi : E \to E'$ l'application qui à u associe la forme linéaire $\langle u, . \rangle$. D'après le théorème de Riesz, l'application ϕ réalise un isomorphisme de E vers E'.
Puisque $\phi : E \to E'$ est un isomorphisme, l'application $\phi^* : l \in E'' \to l \circ \phi \in E'$ est aussi un isomorphisme, de réciproque $\alpha \in E' \to \alpha \circ \phi^{-1} \in E''$.
Calculons $\phi^* \circ J : E \to E'$.

Pour tout $x \in E$, $\phi^* \circ J(x) = \phi^*(J(x)) = J(x) \circ \phi$. Pour tout $y \in E$, on a donc $\phi^* \circ J(x)(y) = J(x)(\langle y, . \rangle) = \langle y, x \rangle = \phi(x)(y)$.
Donc $\phi^* \circ J = \phi$. Donc $\phi^* \circ J$ est un isomorphisme. Comme ϕ^* est un isomorphisme, J doit l'être aussi.
b) Notation : dans cette question, si $g : E \to F$ est une application continue entre deux espaces vectoriels normés, on note $g^* : F' \to E'$ l'application $g^* : l \in F' \to l \circ g \in E'$. C'est un isomorphisme si g est un isomorphisme.
Si $1 < p < +\infty$, alors $l^p(\mathbb{N})$ est réflexif. En effet, soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Notons

$$\begin{aligned} \gamma_p : l^q(\mathbb{N}) &\to (l^p(\mathbb{N}))' \\ u &\to \left(v \to \sum_n u_n v_n \right) \end{aligned}$$

On définit de même γ_q. On sait que ces deux applications sont des isomorphismes (cf. exercice 5).
Soit $J_p : l^p(\mathbb{N}) \to (l^p(\mathbb{N}))''$ l'application telle que $J_p(u)(f) = f(u)$ pour toutes $u \in l^p(\mathbb{N}), f \in (l^p(\mathbb{N}))'$.
Remarquons que $\gamma_p^* \circ J_p = \gamma_q$. En effet, pour toutes $u \in l^p(\mathbb{N}), v \in l^q(\mathbb{N})$:

$$((\gamma_p^* \circ J_p)(u))(v) = (J_p(u) \circ \gamma_p)(v) = J_p(u) \left(w \in l^p(\mathbb{N}) \to \sum_n w_n v_n \right) = \sum_n u_n v_n = \gamma_q(u)(v)$$

Puisque γ_p est un isomorphisme, γ_p^* l'est aussi. L'application γ_q étant aussi un isomorphisme, l'application $J_p = (\gamma_p^*)^{-1} \circ \gamma_q$ est un isomorphisme.
L'espace $l^1(\mathbb{N})$ n'est pas réflexif.
Définissons, comme précédemment

$$\begin{aligned} \gamma_\infty : l^1(\mathbb{N}) &\to (l^\infty(\mathbb{N}))' \\ u &\to \left(v \to \sum_n u_n v_n \right) \end{aligned}$$

On définit γ_1 de manière similaire. On sait que γ_1 est un homéomorphisme mais pas γ_∞.
Soit $J_1 : l^1(\mathbb{N}) \to (l^1(\mathbb{N}))''$ l'application telle que, pour toute $u \in l^1(\mathbb{N})$, $J_1(u)(f) = f(u)$. De même que précédemment, $\gamma_1^* \circ J_1 = \gamma_\infty$.
Comme γ_1^* est un homéomorphisme mais pas γ_∞, J_1 ne peut pas l'être.
L'espace l^∞ n'est pas non plus réflexif. En effet, soit $L \in (l^\infty)'$ une forme linéaire continue telle que, pour toute $u \in l^\infty$ convergente, on ait :

$$L(u) = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

Une telle forme linéaire existe d'après la question 3.a) de l'exercice 5.
Notons $X_1 = \gamma_\infty(l^1(\mathbb{N}))$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $l^\infty(\mathbb{N})$ qui sont de la forme $\gamma_\infty(u) : v \in l^\infty \to \sum_n u_n v_n$ avec $u \in l^1$.

Posons $X_2 = X_1 \oplus \mathbb{R}L$ et définissons une forme linéaire sur X_2 par :

$$M(\gamma_\infty(u) + rL) = r$$

L'application M est continue. En effet, pour toute u et tout r, $|r| \leq ||\gamma_\infty(u) + rL||$: si on pose $v^{(N)}$ la suite qui vaut 0 jusqu'au rang N et 1 au-delà, on a

$$\begin{aligned} ||\gamma_\infty(u) + rL|| &\geq \lim_{N \to +\infty} \frac{(\gamma_\infty(u) + rL)(v^{(N)})}{||v^{(N)}||_\infty} \\ &\geq \lim_{N \to +\infty} r - \sum_{n > N} |u_n| \\ &= r \end{aligned}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut donc prolonger M en une forme linéaire continue sur tout $(l^\infty)'$. On note toujours M la forme linéaire prolongée.
Montrons qu'il n'existe pas $v \in l^\infty$ telle que $M = J(v)$. Supposons par l'absurde que $M = J(v)$ pour un certain v.
Pour toute $u \in l^1$, $J(v)(\gamma_\infty(u)) = 0$ donc $0 = \gamma_\infty(u)(v) = \sum_n u_n v_n$. En évaluant cette expression pour les u dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une, on voit que $v_n = 0$ pour tout n. Donc $v = 0$. Donc $1 = M(L) = J(v)(L) = 0$. C'est absurde.