École Normale Supérieure
20 novembre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$8

Exercice 1 : propriété de Banach-Saks

Soit H un espace de Hilbert.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de H.
Montrer qu'il existe une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, si on pose :

$$v_N = \frac{u_{\phi(0)} + ... + u_{\phi(N-1)}}{N} \qquad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

alors la suite $(v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2 : fonction à dérivées successives prescrites

On rappelle que le *support* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'adhérence de $f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Dans cet exercice, on souhaite montrer le résultat suivant, dû à Borel :

> Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et I un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$. Il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, à support dans I, tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = c_n$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, à support dans $]-1, 1[$, qui vaut 1 au voisinage de 0.

2. On introduit, pour ε_n suffisamment petit pour que $]-\varepsilon_n, \varepsilon_n[\subset I$, la fonction

$$g_n(x) = c_n \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Montrer que si ε_n est assez petit, on a $\left|g_n^{(\alpha)}(x)\right| \leq 2^{-n}$ sur $\mathbb{R},$ pour tout $\alpha \in \{0, \dots, n-1\}$.

3. Conclure, en utilisant la fonction $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

Exercice 3 : un théorème de Whitney

Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Un théorème de Whitney établit que F est le lieu des zéros d'une fonctions réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

1. Montrer qu'il existe une famille dénombrable de boules $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et d'applications $f_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telles que $F = \mathbb{R}^n - \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} B_i$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } f_i(x) = 0\} = \mathbb{R}^n - B_i$$

2. Construire l'application recherchée à partir des f_i.

Exercice 4 : isométries de $\mathbb{R}^n$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne. Rappelons que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une *isométrie* si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $||f(y) - f(x)|| = ||y - x||$.
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. On va montrer que f est une isométrie si et seulement si sa différentielle est une isométrie en tout point.

1. Si f est une isométrie, démontrer que sa différentielle l'est également.

2. À partir de maintenant, on suppose que la différentielle de f est une isométrie en tout point. Montrer que, pour tous $h, k, l \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle d^{(2)}f(x).(h,l), df(x).k\rangle + \langle df(x).h, d^{(2)}f(x).(k,l)\rangle = 0$$

3. On note $g(h,k,l) = \langle d^{(2)}f(x).(h,l), df(x).k\rangle$. Déduire de la question précédente que $g(h,k,l) = -g(k,h,l)$ puis montrer que $g(h,k,l) = 0$.
4. Conclure.

Exercice 5 : théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert.
Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue. On suppose que a est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall x \in H, \quad a(x,x) \geq c||x||^2$$

On va montrer que, pour toute forme linéaire continue $\phi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = \phi(v)$$

1. Montrer que si u existe, il est nécessairement unique.

2. a) Montrer qu'il existe une application linéaire et continue $A : H \to H$ telle que, pour tous $u, v \in H$:

$$a(u,v) = \langle A(u), v\rangle$$

b) Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\forall u \in H, \quad ||A(u)|| \geq \gamma||u||$$

c) Montrer que l'image de A est fermée dans H.
d) Montrer que A est surjective et conclure.

Exercice 6 : opérateurs compacts

Soient E, F deux espaces de Banach. On dit qu'une application linéaire continue $u : E \to F$ est *compacte* si l'image par u de la boule unité de E est d'adhérence compacte dans F.

1. a) Montrer que tout opérateur de rang fini est compact.

b) Soit $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$. Montrer que s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs de rang fini telle que $||u - u_n|| \to 0$, alors u est compact.

2. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on définit l'*adjoint* de u, qu'on note u^*, par :

$$\begin{aligned} u^* : F' &\to E' \\ l &\to l \circ u \end{aligned}$$

(où E' (resp. F') désigne le dual topologique de E (resp. F), c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E (resp. F))

Dans cette question, on suppose que u est compact et on montre que u^* l'est aussi.

a) Posons $K = \overline{u(B_E(0,1))} \subset F$.

Soit $i : F' \to \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ l'application qui à une fonction l associe $l_{|K}$. Montrer qu'il existe une isométrie entre $i(B'_F(0,1))$ et $u^*(B_{F'}(0,1))$.

b) En déduire que $u^*(B_{F'}(0,1))$ est précompacte, puis que u^* est compact.

3. On suppose maintenant que u^* est compact et on montre que u est compact.

a) Montrer que $u^{**} : E'' \to F''$ est compact.

b) On note $J_E : E \to E''$ l'application telle que $J_E(x)(l) = l(x)$ pour tous $x \in E, l \in E'$. On définit de même $J_F : F \to F''$. On a vu la semaine dernière que J_E et J_F étaient des isométries vers leurs images.

Montrer que $u^{**} \circ J_E = J_F \circ u$.

c) Conclure.

4. On suppose maintenant $E = F$.

a) Montrer que si u est compact, alors $\mathrm{Ker}\,(Id_E - u)$ est de dimension finie.

[Indication : penser à un théorème de Riesz.]

b) Montrer que $\mathrm{Im}\,(Id_E - u)$ est fermée.

[Indication : montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y \in (\mathrm{Ker}\,(Id_E - u))^\perp$, on ait $||(Id_E - u)(y)|| \geq \alpha ||y||$.]

c) Montrer que $\{l \in E' \text{ tq } l(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathrm{Im}\,(Id_E - u)\} = \mathrm{Ker}\,(Id_{E'} - u^*)$.

d) En déduire que $\mathrm{Im}\,(Id_E - u)$ est de codimension finie.

[Remarque : on peut d'ailleurs démontrer que la dimension de $\mathrm{Ker}\,(Id_E - u)$ et la codimension de $\mathrm{Im}\,(Id_E - u)$ sont égales.]