École Normale Supérieure
20 novembre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$8

Corrigé

Exercice 1

Quitte à considérer une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un certain $x \in H$.
Quitte à soustraire x à tous les éléments de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que $x = 0$.
Montrons alors qu'il existe une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\frac{u_{\phi(0)} + ... + u_{\phi(N-1)}}{N} \to 0 \text{ quand } N \to +\infty$$

Soit $M > 0$ tel que $||u_k|| \leq M$ pour tout k.
Pour tout k, $\lim\limits_{l\to+\infty} \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k, x\rangle = \langle u_k, 0\rangle = 0$.
On construit l'extraction ϕ par récurrence :

- On pose $\phi(0) = 0$.
- Lorsque l'on a construit $\phi(0), ..., \phi(N)$, on choisit $\phi(N + 1)$ de façon à ce que :

$$\forall n \leq N, \forall l \geq \phi(N+1), \quad |\langle u_{\phi(n)}, u_l\rangle| \leq 2^{-(N+1)}/(N+1)$$

Alors, pour tout N :

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{u_{\phi(0)} + ... + u_{\phi(N-1)}}{N}\right|\right|^2 &\leq \frac{1}{N^2}\left(\sum_{n\leq N-1} ||u_{\phi(n)}||^2 + 2\sum_{0\leq n<n'\leq N-1} |\langle u_{\phi(n)}, u_{\phi(n')}\rangle|\right) \\
&\leq \frac{1}{N^2}\left(M^2N + 2\sum_{0\leq n<n'\leq N-1} 2^{-n'}/n'\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\left(M^2N + 2\sum_{1\leq n'\leq N-1} 2^{-n'}\right) \\
&\leq \frac{1}{N^2}\left(M^2N + 2\right) \\
&\to 0 \text{ quand } N \to +\infty
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Notons χ la fonction telle que $\chi(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\chi(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, dont l'ensemble des zéros est exactement $\mathbb{R}^-$.

Pour montrer que χ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on donne seulement le principe de la démonstration : il suffit de démontrer que, pour toute fonction P polynomiale, $x \to \frac{P(x)}{x^n}e^{-1/x}$ est une fonction continue et dérivable, dont la dérivée est de la forme $x \to \frac{Q(x)}{x^n}e^{-1/x}$ pour une autre fonction polynomiale Q. Ce résultat permet de démontrer par récurrence que χ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n.
Posons $\chi_2(x) = \chi(x+1/2)\chi(-1/3-x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, nulle sur $]-\infty;-1/2] \cup [-1/3;+\infty[$ et strictement positive sur $]-1/2;-1/3[$. On note F sa primitive qui vaut 0 sur $]-\infty;-1/2]$. La fonction F est constante non-nulle sur $[-1/3;+\infty[$.
La fonction $\phi(x) = \frac{F(x)F(-x)}{F(0)^2}$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle vaut 0 sur $\mathbb{R} - [-1/2;1/2]$ donc est à support dans $]-1;1[$. Sur $[-1/3;1/3]$, elle est constante, de valeur 1.
2. Sur $\mathbb{R} -]-\epsilon_n;\epsilon_n[$, g_n est identiquement nulle donc l'inégalité est vérifiée. Il suffit de montrer que, pour ϵ_n assez petit, elle est aussi vérifiée sur $]-\epsilon_n;\epsilon_n[$.
Par la formule de dérivée des produits :

$$g_n^{(\alpha)}(x) = c_n \sum_{s=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{s} \frac{1}{\epsilon_n^s} \phi^{(s)}\left(\frac{x}{\epsilon_n}\right) \frac{x^{n-(\alpha-s)}}{(n-(\alpha-s))!}$$

Donc, lorsque $|x| < \epsilon_n$:

$$|g_n^{(\alpha)}(x)| \leq |c_n| \epsilon_n^{n-\alpha} \sum_{s=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{s} \left|\phi^{(s)}\left(\frac{x}{\epsilon_n}\right)\right| \frac{1}{(n-\alpha+s)!}$$

Pour tout s, la fonction $\phi^{(s)}$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}$ (car elle est à support compact). Pour tout $\alpha < n$, le terme précédent tend donc vers 0 uniformément en x lorsque $\epsilon_n \to 0$. En particulier, si on choisit ϵ_n assez petit, on peut avoir $||g_n^{(\alpha)}||_\infty \leq 2^{-n}$ pour tout $\alpha < n$.
3. On choisit les ϵ_n comme dans la question précédente, de sorte que $||g_n^{(\alpha)}||_\infty \leq 2^{-n}$ pour tous n et α tels que $\alpha < n$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n g_n^{(\alpha)}$ converge alors normalement. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout α :

$$\begin{aligned} & f^{(\alpha)} = \sum_n g_n^{(\alpha)} \\ \Rightarrow \qquad & f^{(\alpha)}(0) = g_\alpha^{(\alpha)}(0) = c_\alpha \end{aligned}$$

En effet, pour tout n, $g_n(x) = c_n \frac{x^n}{n!}$ au voisinage de 0 donc $g_n^{(\alpha)}(0) = c_n$ si $\alpha = n$ et 0 sinon.

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n - F$ quelconque. On fixe $\epsilon(x) > 0$ tel que $B(x,\epsilon(x)) \subset \mathbb{R}^n - F$.
Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $\phi(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\phi(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (voir exercice précédent), telle que $\phi(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$.
Posons, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $g_x(y) = \phi(\epsilon(x)^2 - ||y-x||^2)$.
La fonction g_x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (car composée de fonction $\mathcal{C}^\infty$) et $\{y \in \mathbb{R}^n \text{ tq } g_x(y) = 0\} = \mathbb{R}^n - B(x,\epsilon(x))$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } ||x|| \leq m \text{ et } d(x,F) \geq 1/m\}$. Cet ensemble est fermé et inclus dans $\mathbb{R}^n - F$.
Pour tout m, G_m est compact (car c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$) donc il existe un nombre fini d'éléments, $x_1^{(m)}, ..., x_{N_m}^{(m)}$, tels que :

$$G_m \subset \bigcup_{k \leq N_m} B(x_k^{(m)}, \epsilon(x_k^{(m)}))$$

Comme $\mathbb{R}^n - F = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} G_m$, on peut prendre comme boules $(B_i)_{i \in I}$ l'ensemble des $B(x_k^{(m)}, \epsilon(x_k^{(m)}))$, pour toutes les valeurs de k et m, et comme fonctions $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ les $g_{x_k^{(m)}}$ associées.

2. Quitte à les élever au carré, on peut supposer que les fonctions de la question précédente sont à valeurs positives.
Pour tout i, on note $M_i = \sup_{j \leq i} ||f_i^{(j)}||_\infty$.
On pose $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i M_i} f_i$.
La série qui définit f converge normalement, ainsi que, pour tout j, la série $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i M_i} f_i^{(j)}$. En effet, $\left|\left|\frac{1}{2^i M_i} f_i^{(j)}\right|\right|_\infty \leq 2^{-i}$ pour tout $i \geq j$.
On en déduit que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour tout $x \in F$, $f(x) = 0$. En effet, $f_i(x) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, car $x \notin B_i$ si $x \in F$.
Pour tout $x \notin F$, il existe i tel que $x \in B_i$ donc $f(x) \geq \frac{1}{2^i M_i} f_i(x) > 0$.

Exercice 4

1. Si f est une isométrie, f est de la forme $f(x) = \alpha + Ax$, où $\alpha \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a alors $df(x) = A$, donc $df(x)$ est une isométrie pour tout x.

2. Soient h, k fixés. Posons $F(x) = \langle df(x).h, df(x).k \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Puisque $df(x)$ est une isométrie pour tout x, F est constante :

$$\forall h, k, \quad F(x) = \langle h, k \rangle$$

On doit donc avoir, pour tous x, l, $dF(x).l = 0$.
Or $dF(x).l = \langle d^{(2)}f(x).(h,l), df(x).k \rangle + \langle df(x).h, d^{(2)}f(x).(k,l) \rangle$.

3. L'égalité de la question précédente est exactement équivalente à $g(h,k,l) + g(k,h,l) = 0$ donc $g(h,k,l) = -g(k,h,l)$ pour tous h, k, l.
Puisque la différentielle seconde est symétrique, on a $g(h,k,l) = g(l,k,h)$ pour tous h, k, l.
Donc $g(h,k,l) = -g(k,h,l) = -g(l,h,k) = g(h,l,k) = g(k,l,h) = -g(l,k,h) = -g(h,k,l)$. Cela implique $g(h,k,l) = 0$ pour tous h, k, l.

4. Pour tout x, $df(x)$ est une isométrie de $\mathbb{R}^n$. C'est donc un isomorphisme. En particulier, $df(x)$ est surjective. Pour tous h, l, il existe k tel que $df(x).k = d^{(2)}f(x).(h,l)$. Puisque $g(h,k,l) = 0$, on doit avoir :

$$0 = g(h,k,l) = \langle d^{(2)}f(x).(h,l), df(x).k \rangle = \langle d^{(2)}f(x).(h,l), d^{(2)}f(x).(h,l) \rangle = ||d^{(2)}f(x).(h,l)||^2$$

Donc $d^{(2)}f(x).(h,l) = 0$ pour tous h, l. Donc $d^{(2)}f(x) = 0$ (pour tout x).

Puisque $d^{(2)}f = 0$, la fonction $x \to df(x)$ est constante. Il existe donc $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $df(x) = A$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
Alors $x \to f(x) - Ax$ est une fonction de différentielle nulle, c'est-à-dire une fonction constante. On en déduit que, pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \alpha + Ax$$

Donc f est une isométrie.

Exercice 5

1. Supposons que u et u' vérifient la propriété. Alors $a(u,v) = a(u',v)$ pour tout $v \in H$, soit $a(u-u',v) = 0$. En particulier, pour $v = u - u'$, on a :

$$0 \leq c||u-u'||^2 \leq a(u-u', u-u') = 0$$

donc $u = u'$.
2. a) Pour tout u, l'application $v \to a(u,v)$ est une forme linéaire continue. Par le théorème de Riesz, il existe donc un unique $A(u) \in H$ tel que $a(u,v) = \langle A(u), v\rangle$.
L'application A est linéaire.
Elle est continue. En effet, puisque a est continue, il existe $C > 0$ telle que, pour tous u, v, $|a(u,v)| \leq C||u||\,||v||$. Pour une telle constante C, on doit avoir :

$$||A(u)||^2 = \langle A(u), A(u)\rangle = a(u, A(u)) \leq C||u||\,||A(u)||$$

donc $||A(u)|| \leq C||u||$.
b) Soit $c > 0$ tel que $a(x,x) \geq c||x||^2$ pour tout $x \in H$.
Alors, pour tout u, $||A(u)||\,||u|| \geq \langle A(u), u\rangle = a(u,u) \geq c||u||^2$. Donc $||A(u)|| \geq c||u||$.
c) Soient $(A(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'image de A qui converge vers une limite $y \in H$. Montrons que $y \in \operatorname{Im} A$.
Pour tous n, m, $||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{\gamma}||A(x_n) - A(x_m)||$. Comme la suite $(A(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (puisqu'elle converge), la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Elle converge donc dans H vers une limite x_∞, qui vérifie $y = A(x_\infty)$. Donc $y \in \operatorname{Im} A$.
d) Puisque $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, on a $\operatorname{Im} A = H$ si et seulement si l'orthogonal de $\operatorname{Im} A$ est réduit à $\{0\}$.
Soit $z \in (\operatorname{Im} A)^\perp$. Montrons que $z = 0$.
On doit avoir $\langle A(z), z\rangle = 0$, puisque $z \perp \operatorname{Im} A$, mais $\langle A(z), z\rangle = a(z,z) \geq c||z||^2$. Donc $||z|| = 0$.
Donc $\operatorname{Im} A = H$.

Concluons. Soit $\phi \in H'$. D'après le théorème de Riesz, il existe $w \in H$ tel que $\phi(v) = \langle w, v\rangle$ pour tout $v \in H$. Puisque A est surjective, il existe $u \in H$ tel que $w = A(u)$.
Pour tout $v \in H$, on a alors $\phi(v) = \langle w, v\rangle = \langle A(u), v\rangle = a(u,v)$.

Exercice 6

1. a) Si u est de rang fini, alors il existe F_0 un sous-espace vectoriel de dimension finie de F tel que $u(E) \subset F_0$. Puisque F_0 est de dimension finie, c'est un fermé et chacun de ses sous-ensembles

bornés est d'adhérence compacte. En particulier, $u(B_E(0,1))$ est d'adhérence compacte dans F_0 et donc dans F.
b) Il suffit de montrer que $u(B_E(0,1))$ est précompacte. Comme F est complet, cela implique en effet que son adhérence est compacte.
Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Montrons que $u(B_E(0,1))$ peut être recouvert par une union finie de boules de rayon ϵ.
Soit n tel que $||u - u_n|| < \epsilon/2$. Puisque u_n est compact (car de rang fini), il existe $x_1, ..., x_s$ tels que :

$$u_n(B_E(0,1)) \subset \bigcup_{k \leq s} B(x_k, \epsilon/2)$$

Alors, pour tout $x \in B_E(0,1)$, il existe k tel que $u_n(x) \in B(x_k, \epsilon/2)$. Puisuqe $||u_n(x) - u(x)|| < \epsilon/2$, on a $u(x) \in B(x_k, \epsilon)$. Donc :

$$u(B_E(0,1)) \subset \bigcup_{k \leq s} B(x_k, \epsilon)$$

2. a) Soit $f \in i(B_{F'}(0,1))$ quelconque. Soit $l \in B_{F'}(0,1)$ tel que $f = l_{|K}$. Posons $\phi(f) = u^*(l)$. Cette application est bien définie car elle ne dépend pas du choix de l : si $f = l_{|K} = \tilde{l}_{|K}$, alors l et $\tilde{l}$ coïncident sur l'image de u donc $u^*(l) = u^*(\tilde{l})$.
Montrons que ϕ est une isométrie sur son image. Il faut montrer que $||\phi(i(l)) - \phi(i(\tilde{l}))|| = ||i(l) - i(\tilde{l})||$ pour toutes $l, \tilde{l} \in B_{F'}(0,1)$.
Supposons $l, \tilde{l}$ fixées. Alors :

$$\begin{aligned}
||i(l) - i(\tilde{l})||_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})} &= \sup_{x \in K} |l(x) - \tilde{l}(x)| \\
&= \sup_{x \in u(B_E(0,1))} |l(x) - \tilde{l}(x)| \\
&= \sup_{y \in B_E(0,1)} |l(u(y)) - \tilde{l}(u(y))| \\
&= ||l \circ u - \tilde{l} \circ u||_{E'} \\
&= ||u^*(l) - u^*(\tilde{l})||_{E'} \\
&= ||\phi(i(l)) - \phi(i(\tilde{l}))||_{E'}
\end{aligned}$$

Montrons que ϕ est surjective. Soit $u^*(l) \in u^*(B_{F'}(0,1))$. Alors $u^*(l) = \phi(i(l))$.
Donc ϕ réalise une isométrie entre $i(B_{F'}(0,1))$ et $u^*(B_{F'}(0,1))$.
b) Par le théorème d'Ascoli, $i(B_{F'}(0,1))$ est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. En effet, K est compact et toutes les fonctions de $i(B_{F'}(0,1))$ sont uniformément bornées (à images dans $[-1;1]$) et 1-lipschitziennes (elles forment donc une famille équicontinue).
Donc $i(B_{F'}(0,1))$ est précompacte et $u^*(B_{F'}(0,1))$, qui lui est isométrique, aussi. Donc $u^*(B_{F'}(0,1))$ est d'adhérence compacte dans E', qui est complet. Donc u^* est compact.

3. a) C'est l'adjoint de u^* donc, d'après la question 2., comme u^* est compact, u^{**} est aussi compact.

b) Si $x \in E, l \in F'$, on a :

$$\begin{aligned} u^{**} \circ J_E(x)(l) &= u^{**}(J_E(x))(l) \\ &= J_E(x)(u^*(l)) \\ &= J_E(x)(l \circ u) \\ &= l \circ u(x) \\ &= J_F(u(x))(l) \\ &= J_F \circ u(x)(l) \end{aligned}$$

c) Puisque J_F préserve les distances, $u(B_E(0,1))$ est isométrique à $J_F(u(B_E(0,1)))$. D'après la question précédente, cette ensemble est égal à $u^{**}(J_E(B_E(0,1)))$.
Puisque J_E est une isométrie, $J_E(B_E(0,1))$ est un sous-ensemble de $B_{E''}(0,1)$. Donc $u^{**}(J_E(B_E(0,1)))$ est inclus dans $u^{**}(B_{E''}(0,1))$. Ce dernier ensemble est d'adhérence compacte (car u^{**} est compact) donc $u^{**}(J_E(B_E(0,1)))$ aussi (son adhérence est un fermé d'un compact donc un compact).
En particulier, $u^{**}(J_E(B_E(0,1)))$ est précompact. Donc $u(B_E(0,1))$ aussi. Donc $u(B_E(0,1))$ est d'adhérence compacte et u est un opérateur compact.

4. a) Posons $E_0 = \mathrm{Ker}\,(Id_E - u)$. La boule unité de E_0 est incluse dans $u(B_E(0,1))$ car, si $x \in E_0$ et $||x|| < 1$, $x - u(x) = 0$ donc $x = u(x) \in u(B_E(0,1))$.
Donc la boule unité de E_0 est incluse dans un compact. Elle est donc d'adhérence compacte dans E_0. D'après un théorème dû à Riesz, cela implique que E_0 est de dimension finie.
b) Posons $E_1 = \mathrm{Ker}\,(Id_E - u)^{\perp}$. Montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E_1$:

$$||x - u(x)|| \geq \alpha ||x||$$

Si ce n'est pas le cas, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E_1 tels que $||x_n|| = 1/2$ pour tout n et :

$$||x_n - u(x_n)|| \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Puisque $u(B_E(0,1))$ est d'adhérence compacte, on peut, quitte à extraire, supposer que $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{u(B_E(0,1))}$ vers une limite y. Comme $||x_n|| = 1/2$ pour tout n, $y \neq 0$.
Comme $||x_n - u(x_n)|| \to 0$, on a $x_n \to y$ et $y = u(y)$, c'est-à-dire $y \in \mathrm{Ker}\,(Id_E - u)$.
Comme E_1 est fermé, $y \in E_1$. C'est absurde car $E_1 \cap \mathrm{Ker}\,(Id_E - u) = \{0\}$.
On a donc montré l'existence du α voulu.
Cela implique que $\mathrm{Im}\,(Id_E - u) = (Id_E - u)(E_1)$ est fermée. En effet, si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathrm{Im}\,(Id_E - u)$ convergeant vers une limite y_∞, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E_1 telle que $y_n = x_n - u(x_n)$ pour tout n.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy car, pour tous n, m, $||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{\alpha}||(x_n - x_m) - u(x_n - x_m)|| = \frac{1}{\alpha}||y_n - y_m||$. Elle converge donc dans E_1 vers une limite x_∞ et on a $y_\infty = x_\infty - u(x_\infty) \in \mathrm{Im}\,(Id_E - u)$.

c) Soit $A = \{l \in E' \text{ tq } l(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \operatorname{Im}(Id_E - u)\}$. Montrons que $A = \operatorname{Ker}(Id_{E'} - u^*)$.

$$\begin{aligned}
l \in A &\iff l(x) = 0 \quad \forall x \in \operatorname{Im}(Id_E - u) \\
&\iff l((Id_E - u)(x)) = 0 \quad \forall x \in E \\
&\iff l(x) - u^*(l)(x) = 0 \quad \forall x \in E \\
&\iff l - u^*(l) = 0 \\
&\iff l \in \operatorname{Ker}(Id_{E'} - u^*)
\end{aligned}$$

d) D'après la question 2., puisque u est compact, u^* aussi. D'après la question 4.a), $\operatorname{Ker}(Id_{E'} - u^*)$ est de dimension finie.
Soit $(l_1, ..., l_n)$ une base de $\operatorname{Ker}(Id_{E'} - u^*)$.
Soient $e_1, ..., e_n$ des éléments de E tels que $l_i(e_j) = 0$ si $i \neq j$ et $l_i(e_j) = 1$ si $i = j$.
Montrons que $\operatorname{Im}(Id_E - u) \oplus \operatorname{Vect}\{e_1, ..., e_n\} = E$.
Puisque $\operatorname{Im}(Id_E - u)$ est fermé, $\operatorname{Im}(Id_E - u) \oplus \operatorname{Vect}\{e_1, ..., e_n\}$ l'est aussi. Pour montrer que cet ensemble est égal à E, il suffit donc de montrer, par le théorème de Hahn-Banach, que toute forme linéaire qui est nulle sur cet ensemble est identiquement nulle. Soit l une telle forme linéaire.
Puisque l est nulle sur $\operatorname{Im}(Id_E - u)$, on doit avoir $l \in \operatorname{Ker}(Id_{E'} - u^*)$ donc il existe $a_1, ..., a_n$ tels que $l = a_1 l_1 + ... + a_n l_n$. Pour tout i, $a_i = l(e_i) = 0$.
Donc $l = 0$.