

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$9

Exercice 1 : différentielle du déterminant

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \det(M)$ est différentiable en tout point.

2. Calculer sa différentielle en Id.

3. Soit $M_0 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de det en M_0.

4. Soit $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de det en M_0 en fonction de la comatrice de M_0.

Exercice 2 : différentiabilité des normes

1. Soit $(H, ||.||)$ un espace de Hilbert. En quels points de H la norme est-elle différentiable ?

2. En quels points $||.||_1$ est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

3. Soit E un espace vectoriel normé et Ω un ouvert. Soit d une distance sur Ω. Montrer que $d(.,.)$ n'est pas différentiable sur Ω^2.

Exercice 3 : fonctions homogènes

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient E et F deux espaces de Banach réels. Une application $f : E \to F$ est *homogène de degré* k si, pour tout $x \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(tx) = t^k f(x)$.

1. On suppose que f est homogène de degré k et différentiable en-dehors de 0. Montrer que, pour tout $x \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$df(x).x = kf(x) \qquad\qquad df(tx) = t^{k-1} df(x)$$

2. Montrer qu'une application f homogène de degré k et de classe $\mathcal{C}^k$ vérifie :

$$\forall h \in E, f(h) = \frac{1}{k!} d^k f(0).(h, ..., h)$$

[c'est-à-dire que f est induite par une application k-multilinéaire.]

3. Cela reste-t-il vrai si f n'est pas de classe $\mathcal{C}^k$?

Exercice 4 : descente de gradient

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne usuelle.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe telle que $f(x) \to +\infty$ lorsque $||x|| \to +\infty$.

1. Montrer que f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$ et que le minimum est atteint en un point unique, qu'on note x^*.

[Indication : on pourra admettre qu'une fonction convexe de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ est nécessairement continue.]

On suppose maintenant que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On définit récursivement, pour tout $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$$

2. On suppose que l'application $x \to \nabla f(x)$ est L-lipschitzienne pour un certain $L > 0$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad ||\nabla f(x) - \nabla f(y)|| \leq L||x - y||$$

a) Montrer que, pour tout n, $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - ||\nabla f(x_n)||^2 \alpha(1 - \frac{L\alpha}{2})$.
[Indication : écrire $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ comme une intégrale.]
b) On suppose maintenant que $\alpha \leq 1/L$. Déduire de l'inégalité précédente que :

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &\leq f(x^*) + \langle \nabla f(x_n), x_n - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}||\nabla f(x_n)||^2 \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2\alpha}\left(||x_n - x^*||^2 - ||x_{n+1} - x^*||^2\right) \end{aligned}$$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) - f(x^*) \leq \frac{1}{2n\alpha}||x_0 - x^*||^2$.
[Indication : Montrer d'abord que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis sommer les inégalités obtenues à la question précédente.]
3. On suppose toujours que $x \to \nabla f(x)$ est L-lipschitzienne mais on suppose de plus que f est m-fortement convexe pour un certain $m > 0$, c'est-à-dire que la fonction $x \to f(x) - \frac{m}{2}||x||^2$ est convexe.
a) Montrer que, pour tous x, y :

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{m}{2}||x - y||^2$$

b) Montrer que, si α est plus petit qu'une certaine constante ne dépendant que de m et L, alors il existe $c \in]0; 1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad ||x_n - x^*|| \leq c^n ||x_0 - x^*||$$

Exercice 5 : intégration dans un espace de Banach
Soit (X, μ) un espace muni d'une mesure μ finie. Soit E un espace de Banach.
Étant donnée une application $f : X \to E$ mesurable et un élément $I \in E$, on dit que :

$$I = \int f(x) d\mu(x) \tag{1}$$

si, pour toute $l \in E'$, $l \circ f$ est intégrable et vérifie :

$$l(I) = \int l \circ f(x) d\mu(x)$$

1. a) Montrer que s'il existe I vérifiant (1), alors un tel I est unique.

b) Montrer que I vérifie $||I|| \leq \int ||f(x)||d\mu(x)$.

2. Montrer que si f est d'image précompacte, alors $\int f(x)d\mu(x)$ est bien définie.

3. Soit $c_0 = \{u \in l^\infty(\mathbb{N})$ tq $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty\}$.
a) Montrer que c_0 (muni de la norme $||.||_\infty$) est un espace de Banach.
b) Montrer que le dual topologique de c_0 est isomorphe à l^1 et donner un isomorphisme explicite $\phi : l^1 \to c_0'$.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $e^{(n)}$ la suite telle que :

$$\begin{aligned} e_k^{(n)} &= 0 \text{ si } k \neq n \\ &= 1 \text{ si } k = n \end{aligned}$$

On définit $f :]0;1] \to c_0$ par $f(t) = 2^{n+1}e^{(n)}$ si $t \in]2^{-(n+1)}; 2^{-n}]$.
Montrer que, pour toute $l \in c_0'$, $l \circ f$ est intégrable.
d) Montrer que $\int_0^1 f(t)dt$ n'est pas définie.

Exercice 6 : théorème de Sard

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\Omega =]0;1[^m$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On dit que $x \in \Omega$ est un *point critique* de f si $df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ n'est pas surjective. On dit que $y \in \mathbb{R}^n$ est une *valeur critique* de f s'il existe un point critique $x \in \Omega$ tel que $y = f(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $m = n = 1$. Montrer que l'ensemble des valeurs critiques de f dans $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle.
[Indication : montrer d'abord que, pour tout $\epsilon > 0$, si $U \subset \Omega$ est un ouvert tel que $|f'(x)| \leq \epsilon$ pour tout $x \in U$, alors $\lambda(f(U)) \leq \epsilon\lambda(U)$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$).]

On suppose maintenant $m = 2$ et $n = 1$ et on va montrer le même résultat. On note :

$$C_1 = \{x \in \Omega \text{ tq } df(x) = 0\}$$
$$C_2 = \{x \in \Omega \text{ tq } df(x) = 0 \text{ et } df^{(2)}(x) = 0\}$$

2. a) Soit D un carré inclus dans Ω. Supposons qu'il existe $x_0 \in D$ tel que $df(x_0) = 0$. Montrer que, pour tout $x \in D$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{||x - x_0||^2}{2} \sup_{z \in D} ||d^{(2)}f(z)||$$

b) Montrer que $f(C_2)$ est de mesure nulle.

3. Soit $x_0 \in C_1 - C_2$. Puisque $d^{(2)}f(x_0) \neq 0$, il existe $i, j \in \{1, 2\}$ tels que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \neq 0$$

On suppose $i = 1$ et on pose $\rho = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. On a donc $\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$.
Soit $h : \Omega \to \mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$h(x_1, x_2) = (\rho(x_1, x_2), x_2)$$

a) Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 sur lequel h est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme vers son image.
[Indication : utiliser le théorème d'inversion locale.]
Notons $\mathcal{V}'$ l'image de $\mathcal{V}$ par h et posons $g = f \circ h^{-1} : \mathcal{V}' \to \mathbb{R}$.
b) Montrer que $h(\mathcal{V} \cap C_1) \subset (\{0\} \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{V}'$.
c) Soit g_1 l'application telle que $g_1(t) = g(0, t)$ si $(0, t) \in \mathcal{V}'$. Montrer que si $h^{-1}(0, t) \in C_1$, alors t est un point critique de g_1.
d) En déduire que $f(C_1 \cap \mathcal{V})$ est de mesure nulle.
e) Montrer que $f(C_1 - C_2)$ est de mesure nulle.

4. Montrer que l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$.

[Ce résultat est vrai pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ et peut être démontré avec une méthode similaire à celle que nous avons utilisée pour le cas $m = 2, n = 1$. Le fait que Ω soit borné n'est pas nécessaire.
Le théorème est encore vrai si, au lieu de supposer f de classe $\mathcal{C}^\infty$, on suppose f de classe $\mathcal{C}^r$ avec $r > \max(0, m - n)$.]