École Normale Supérieure — Topologie, analyse et calcul différentiel

27 novembre 2014

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$9

Corrigé

Exercice 1

1. Si on identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$, le déterminant est une application polynomiale. Elle est donc différentiable en tout point et même de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Soient $i, j \in \{1, ..., n\}$. Soit $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui qui est situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne, qui vaut 1.
Pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\det(\mathrm{Id} + hE_{i,j}) = 1$ si $i \neq j$ et $\det(\mathrm{Id} + hE_{i,j}) = 1 + h$ si $i = j$.
On a donc $D\det(\mathrm{Id}).E_{i,j} = \delta_{i,j}$. Pour toute matrice M, on doit donc avoir $D\det(\mathrm{Id}).M = \sum\limits_{i,j} M_{i,j} D\det(\mathrm{Id}).E_{i,j} = \sum\limits_{i} M_{i,i} = \mathrm{Tr}(M)$.

3. $\det(M_0+H) = \det(M_0)\det(\mathrm{Id}+M_0^{-1}H) = \det(M_0)(1+\mathrm{Tr}(M_0^{-1}H)+o(M_0^{-1}H)) = \det(M_0)+\det(M_0)\mathrm{Tr}(M_0^{-1}H) + o(H)$.
Donc $D\det(M_0).H = \det(M_0)\mathrm{Tr}(M_0^{-1}H)$.

4. Pour M_0 inversible, on vient de voir que, pour toute H, $D\det(M_0).H = \det(M_0)\mathrm{Tr}(M_0^{-1}H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(M_0)H)$.
Comme det est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (d'après la première question) et comme l'ensemble des matrices inversibles est dense dans l'ensemble des matrices, cette égalité est vraie, par densité, pour toutes les matrices M_0, inversibles ou non.

Exercice 2

1. $x \to \langle x, x\rangle = ||x||^2$ est une application différentiable : $\langle x+h, x+h\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, h\rangle + o(h)$ pour tout $x \in H$.
Puisque l'application $\sqrt{.}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'application $x \to ||x||$ est dérivable (par composition) en tout $x \neq 0$.
En revanche, $||.||$ n'est pas dérivable en 0 : en effet, pour tout $h \neq 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{||th||}{t} = ||h|| \neq -||h|| = \lim\limits_{t\to 0^-} \frac{||th||}{t}$.

2. $||(x_1, x_2)||_1 = |x_1| + |x_2|$
L'application $|.|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc $||.||_1$ est dérivable en tout (x_1, x_2) tel que $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$.
Montrons que, pour tout x_2, $||.||_1$ n'est pas différentiable en $(0, x_2)$. En effet, $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{||(t,x_2)||-||x_2||}{t} = 1 \neq -1 = \lim\limits_{t\to 0^-} \frac{||(t,x_2)||-||x_2||}{t}$.
De même, pour tout x_1, $||.||_1$ n'est pas différentiable en $(x_1, 0)$.
L'application $||.||_1$ est donc différentiable sur $\mathbb{R}^2 - ((\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}))$.

3. Dans cette question, on note D la différentielle, pour éviter les confusions avec la distance d. Supposons par l'absurde que d est différentiable sur Ω^2. Pour tout $x \in \Omega$, (x, x) est un point où d atteint un minimum local. On doit donc avoir $Dd(x, x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.
Soit $x_0 \in \Omega$ quelconque. Soit $u \in E - \{0\}$ tel que $x_0 + tu \in \Omega$ pour tout $t \in [0; 1]$ (tout u de norme assez petite convient, puisque Ω est ouvert). Définissons $\phi : [0; 1] \to \mathbb{R}$ l'application telle que $\phi(t) = d(x_0, x_0 + tu)$.
Pour tout $t_0 \in [0; 1[$ et tout h assez petit, $|\phi(t_0 + h) - \phi(t)| = |d(x_0, x_0 + t_0u) - d(x_0, x_0 + t_0u + hu)| \leq d(x_0 + t_0u, x_0 + t_0u + hu)$.
Puisque $d(x_0+t_0u, x_0+t_0u+hu) = d(x_0+t_0u, x_0+t_0u)+Dd(x_0+t_0u, x_0+t_0u).(hu)+o(h) = o(h)$, l'application ϕ est dérivable en t_0 de dérivée nulle.
L'application ϕ est donc de dérivée nulle en tout point. C'est une fonction constante. Donc $d(x_0, x_0 + u) = 0$. C'est en contradiction avec le fait que d est séparante.

Exercice 3

1. Lorsque $h \in \mathbb{R}$ tend vers 0 : $f((1+h)x) = f(x) + df(x).(hx) + o(h) = f(x) + hdf(x).x + o(h)$.
Or $f((1 + h)x) = (1 + h)^k f(x) = (1 + kh + o(h))f(x) = f(x) + h(kf(x)) + o(h)$.
Par unicité du développement limité, $df(x).x = kf(x)$.
$f(tx + u) = f(tx) + df(tx).u + o(u)$
De plus, $f(tx + u) = f(t(x + u/t)) = t^k f(x + u/t) = t^k(f(x) + df(x).(u/t) + o(u)) = f(tx) + t^{k-1}df(x).u + o(u)$.
Par unicité de la différentielle, on a donc $df(tx) = t^{k-1}df(x)$.

2. On procède par récurrence sur k.
Pour $k = 0$, c'est vrai : pour tout $x \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $f(tx) = f(x)$. Pour $t = 0$, cela implique que, pour tout x, $f(x) = f(0)$.
Si c'est vrai pour $k - 1$, démontrons-le pour k. Si f est homogène de degré k et de classe $\mathcal{C}^k$, df est homogène de degré $k - 1$ et de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, d'après la deuxième inégalité de la première question (cette égalité est aussi valable en $t = 0$, par continuité).
On a donc, pour tout x, $df(x) = \frac{1}{(k-1)!}df^{(k)}(0)(x, ..., x)$, par hypothèse de récurrence.
D'après la première question, cela implique, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{k}df(x).x = \frac{1}{k!}df^{(k)}(0)(x, ..., x)$.
C'est aussi vrai si $x = 0$, par continuité.

3. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et 2π-périodique telle que $\phi(x + \pi) = -\phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
L'application $f : \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\rho e^{i\theta}) = \rho\phi(\theta)$ est une application homogène de degré 1. Pourtant, elle n'est pas nécessairement linéaire.

Exercice 4

1. Montrons d'abord que le minimum est atteint.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Soit $R > 0$ tel que, pour tout x tel que $||x|| > R$, $f(x) > f(x_0)$. Soit m le minimum de f sur $\overline{B}(0, R)$. Il est atteint car la convexité de f implique sa continuité. C'est aussi le minimum sur tout $\mathbb{R}^n$.

Montrons maintenant que le point auquel le minimum est atteint est unique.

Supposons par l'absurde que le minimum est atteint en deux points distincts x_0 et x_1. Alors, comme f est strictement convexe, $f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) < \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} = \min f$. C'est absurde.
2. a)

$$\begin{aligned}
f(x_{n+1}) - f(x_n) &= \int_0^1 \langle \nabla f(x_n + t(x_{n+1} - x_n)), x_{n+1} - x_n \rangle dt \\
&= \int_0^1 \langle \nabla f(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle dt \\
&\quad + \int_0^1 \langle \nabla f(x_n + t(x_{n+1} - x_n)) - \nabla f(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle dt \\
&\leq \int_0^1 \langle \nabla f(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle dt + \int_0^1 tL||x_{n+1} - x_n||^2 dt \\
&= \langle \nabla f(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle + \frac{L}{2}||x_{n+1} - x_n||^2 \\
&= -\alpha(1 - \frac{L\alpha}{2})||\nabla f(x_n)||^2
\end{aligned}$$

b) La fonction f étant convexe, on a, pour tous y_1, y_2, $f(y_1) - f(y_2) \geq \langle \nabla f(y_2), y_1 - y_2 \rangle$. Pour $y_1 = x^*$ et $y_2 = x_n$, on obtient $f(x_n) \leq f(x^*) + \langle \nabla f(x_n), x_n - x^* \rangle$.

$$\begin{aligned}
f(x_{n+1}) &\leq f(x_n) - ||\nabla f(x_n)||^2 \alpha(1 - \frac{L\alpha}{2}) \\
&\leq f(x_n) - \frac{\alpha}{2}||\nabla f(x_n)||^2 \\
&\leq f(x^*) + \langle \nabla f(x_n), x_n - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}||\nabla f(x_n)||^2 \\
&= f(x^*) + \frac{1}{2\alpha}(2\alpha\langle \nabla f(x_n), x_n - x^* \rangle - \alpha^2||\nabla f(x_n)||^2) \\
&= f(x^*) + \frac{1}{2\alpha}(2\langle x_n - x_{n+1}, x_n - x^* \rangle - ||x_n - x_{n+1}||^2) \\
&= f(x^*) + \frac{1}{2\alpha}(||x_n - x^*||^2 - ||x_{n+1} - x^*||^2)
\end{aligned}$$

c) Puisque, pour tout n, $f(x_{n+1}) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\alpha}(||x_n - x^*||^2 - ||x_{n+1} - x^*||^2)$:

$$\sum_{n=1}^{N}(f(x_n) - f(x^*)) \leq \frac{1}{2\alpha}(||x_0 - x^*||^2 - ||x_N - x^*||^2) \leq \frac{||x_0 - x^*||^2}{2\alpha}$$

Puisque $(f(x_n))_n$ est une suite décroissante (d'après la question a)), cela donne, pour tout $N \geq 1$:

$$f(x_N) - f(x^*) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f(x_n) - f(x^*)) \leq \frac{1}{2N\alpha}||x_0 - x^*||^2$$

3. a) Notons $g(x) = f(x) - \frac{m}{2}||x||^2$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ (puisque f l'est) et vérifie $\nabla g(x) = \nabla f(x) - mx$.

Puisque g est convexe, on a, pour tous x, y :

$$g(y) - g(x) \geq \langle \nabla f(x) - mx, y - x \rangle = \langle \nabla f(x), y - x \rangle - m\langle x, y - x \rangle$$

On obtient donc :

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{m}{2}||y||^2 - \frac{m}{2}||x||^2 - m\langle x, y - x \rangle = \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{m}{2}||x - y||^2$$

b) D'après la question a), $\langle \nabla f(x_n), x_n - x^* \rangle \geq f(x_n) - f(x^*) + \frac{m}{2}||x_n - x^*||^2 \geq \frac{m}{2}||x_n - x^*||^2$.
Donc :

$$\begin{aligned} ||x_{n+1} - x^*||^2 &= ||x_n - x^*||^2 - 2\alpha\langle \nabla f(x_n), x_n - x^* \rangle + \alpha^2||\nabla f(x_n)||^2 \\ &\leq ||x_n - x^*||^2 - m\alpha||x_n - x^*||^2 + \alpha^2||\nabla f(x_n)||^2 \end{aligned}$$

Puisque ∇f est L-lipschitzienne et $\nabla f(x^*) = 0$, on a, pour tout n, $||\nabla f(x_n)|| \leq L||x_n - x^*||$.
On obtient donc l'inégalité :

$$||x_{n+1} - x^*||^2 \leq (1 - m\alpha + L^2\alpha^2)||x_n - x^*||^2$$

Si α est suffisamment petit pour que $1 - m\alpha + L^2\alpha^2 < 1$, on a, pour tout n :

$$||x_{n+1} - x^*|| \leq c||x_n - x^*||$$

avec $c = \sqrt{1 - m\alpha + L^2\alpha^2}$.
Par récurrence, cela implique bien l'inégalité demandée pour tout n.

Exercice 5

1. a) Supposons que deux éléments, I et I', vérifient cette équation. Alors $l(I) = l(I')$ pour toute $l \in E'$.
D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $l \in E'$ telle que $||l|| = 1$ et $l(I - I') = ||I - I'||$.
L'égalité $l(I - I') = 0$ pour toute l implique donc $||I - I'|| = 0$, c'est-à-dire $I = I'$.
b) Soit $l \in E'$ telle que $||l|| = 1$ et $l(I) = ||I||$ (une telle forme linéaire existe d'après le théorème de Hahn-Banach).
Alors $||I|| = l(I) = \int l \circ f(x) d\mu(x) \leq \int ||f(x)|| d\mu(x)$.
2.

Lemme 5.1. *Si l'image de f est incluse dans un espace vectoriel de dimension finie et f est bornée, alors $\int f(x) d\mu(x)$ est bien définie.*

Démonstration. Si l'espace vectoriel est de dimension 1, c'est vrai. En effet, on a alors $f(x) = \phi(x)e$ pour une certaine fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$ et un certain $e \in E$. La fonction ϕ est mesurable et bornée, à images dans $\mathbb{R}$, donc elle est intégrable sur X. La fonction f est alors également intégrable et :

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \left(\int_X \phi(x) dx \right) e$$

Quitte à décomposer f sur une base de son image, on peut se ramener du cas de la dimension finie au cas de la dimension 1. $\square$

Lemme 5.2. *Si f est d'image précompacte, alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables telles que $||f - f_n||_\infty \to 0$ et, pour tout n, l'image de f_n est incluse dans un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $y_1, ..., y_m$ tels que :

$$f(X) \subset \bigcup_i B(y_i, 2^{-n})$$

De tels y_i existent puisque $f(X)$ est précompacte.
On pose, pour tout $x \in X$:

$$f_n(x) = \frac{\sum_i \max(0, 2^{-n} - ||f(x) - y_i||) y_i}{\sum_i \max(0, 2^{-n} - ||f(x) - y_i||)}$$

Cette application est bien définie et continue.
Son image est incluse dans Vect $\{y_1, ..., y_m\}$, donc dans un sous-espace de dimension finie.
De plus, pour tout x, $||f(x) - f_n(x)|| < 2^{-n}$. En effet, pour tout i, $\max(0, 2^{-n} - ||f(x) - y_i||) = 0$ si $||f(x) - y_i|| \geq 2^{-n}$. Donc :

$$\begin{aligned}
||f_n(x) - f(x)|| &= \frac{\sum_i \max(0, 2^{-n} - ||f(x) - y_i||)(y_i - f(x))}{\sum_i \max(0, 2^{-n} - ||f(x) - y_i||)} \\
&\leq \frac{\sum_i \max(0, 2^{-n} - ||f(x) - y_i||) ||y_i - f(x)||}{\sum_i \max(0, 2^{-n} - ||f(x) - y_i||)} \\
&< 2^{-n} \left(\frac{\sum_i \max(0, 2^{-n} - ||f(x) - y_i||)}{\sum_i \max(0, 2^{-n} - ||f(x) - y_i||)} \right) \\
&= 2^{-n}
\end{aligned}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par cette méthode vérifie les propriétés demandées. □

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite comme dans le lemme précédent. Pour tout n, f_n est bornée (car $f - f_n$ l'est et f aussi si son image est précompacte).
D'après le premier lemme, $I_n = \int f_n(x) d\mu(x)$ est donc bien définie pour tout n. De plus, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, d'après la question 1.b) :

$$\begin{aligned}
||I_n - I_m|| = \left|\left| \int (f_n(x) - f_m(x)) d\mu(x) \right|\right| &\leq \int ||(f_n - f_m)(x)|| d\mu(x) \\
&\leq \mu(X) ||f_n - f_m||_\infty \\
&\leq \mu(X)(||f_n - f||_\infty + ||f_m - f||_\infty)
\end{aligned}$$

Cette suite converge donc vers une limite $I_\infty \in E$. Montrons que $I_\infty = \int f(x) d\mu(x)$.
Pour toute $l \in E'$, $l(I_\infty) = \lim_{n\to+\infty} l(I_n)$.

De plus, pour tout n, $l(I_n) = \int l \circ f_n(x) d\mu(x)$. La suite $(l \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $l \circ f$ (puisque l est lipschitzienne et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f). Comme $l \circ f_n$ est intégrable pour tout n, $l \circ f$ aussi et :

$$\int l \circ f(x) d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int l \circ f_n(x) d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} l(I_n) = l(I_\infty)$$

3. a) L'espace c_0 est fermé dans l^∞ (par le théorème d'interversion des limites) et on sait qu'un sous-espace fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.
b) Pour toute $u \in l^1$, posons $\phi(u) \in c_0'$ l'application suivante :

$$\forall v \in c_0, \quad \phi(u)(v) = \sum_n u_n v_n$$

L'application ϕ est bien définie et $||\phi(u)|| \leq ||u||_1$ pour tout u.
De plus, en posant

$$\begin{aligned} v_n^{(N)} &= \text{signe}(u_n) \text{ si } n \leq N \\ &= 0 \text{ si } n > N \end{aligned}$$

on montre que $||\phi(u)|| \geq ||u||_1$, ce qui implique que $||\phi(u)|| = ||u||_1$ pour tout u, et donc que ϕ réalise une isométrie vers son image.
Montrons pour conclure que ϕ est surjective.
Soit $l \in c_0'$. Trouvons $u \in l^1$ tel que $l = \phi(u)$.
Posons, pour tout n :

$$\begin{aligned} e_k^{(n)} &= 1 \text{ si } k = n \\ &= 0 \text{ si } k \neq n \end{aligned}$$

Posons, pour tout n, $u_n = l(e^{(n)})$. Cela définit un élément de l^1. En effet, pour tout N :

$$\begin{aligned} \sum_{n\leq N} |u_n| &= l\left(\sum_{n\leq N} \text{signe}(u_n) e^{(n)}\right) \\ &\leq ||l|| \end{aligned}$$

Les formes linéaires l et $\phi(u)$ coïncident sur l'ensemble des suites stationnaires en 0. Comme cet ensemble est dense dans c_0, $l = \phi(u)$.
c) Soit $l \in c_0'$. On définit ϕ comme à la question précédente. Il existe $u \in l^1$ telle que $l = \phi(u)$. Alors $l \circ f(t) = 2^{n+1} u_n$ si $t \in]2^{-(n+1)}; 2^{-n}]$. Donc :

$$\int_0^1 |l \circ f(t)| dt = \sum_n \int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} 2^{n+1} |u_n| dt = \sum_n |u_n| < +\infty$$

d) Supposons que $v = \int_0^1 f(t) dt$ est définie. On définit toujours ϕ comme en b). Alors, pour tout n :

$$v_n = \phi(e^{(n)})(v) = \int_0^1 \phi(e^{(n)}) \circ f(t) dt = \int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} 2^{n+1} dt = 1$$

Donc $v_n \not\to 0$ quand $n \to +\infty$ et $v \notin c_0$.

Exercice 6

1. Soit U un ouvert tel que $|f'(x)| \leq \epsilon$ pour tout $x \in U$. On peut écrire $U = \bigcup_n]a_n; b_n[$ où les $]a_n; b_n[$ sont des intervalles ouverts disjoints.
Alors $\lambda(U) = \sum_n \lambda(]a_n; b_n[)$.
De plus, pour tout n et tous $x, x' \in]a_n; b_n[$, d'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon|x - x'| \leq \epsilon\lambda(]a_n; b_n[)$. L'image par f de $]a_n; b_n[$ est donc un intervalle de diamètre inférieur ou égal à $\epsilon\lambda(]a_n; b_n[)$. Ainsi :

$$\lambda(f(U)) \leq \sum_n \lambda(f(]a_n; b_n[)) \leq \sum_n \epsilon\lambda(]a_n; b_n[) = \epsilon\lambda(U)$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on note $U_\epsilon = \{x \in \Omega \text{ tq } |f'(x)| < \epsilon\}$. Il s'agit d'un ouvert de Ω contenant l'ensemble des points critiques de f.
L'ensemble des valeurs critiques de f est donc inclus dans $f(U_\epsilon)$ pour tout ϵ, ce qui implique qu'il est de mesure au plus $\epsilon\lambda(U_\epsilon) \leq \epsilon\lambda(\Omega) = \epsilon$. En faisant tendre ϵ vers 0, on trouve bien qu'il est de mesure nulle.

2. a) C'est une conséquence l'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée sur le segment qui joint x_0 et x.
b) Soit $\epsilon > 0$. Posons $U_\epsilon = \{x \in \Omega \text{ tq } ||d^{(2)}f(x)|| < \epsilon\}$. On admet qu'il existe $\{D_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un ensemble dénombrable de carrés inclus dans Ω tels que :

$$U_\epsilon = \bigcup_k D_k \qquad\qquad \lambda(U_\epsilon) = \sum_k \lambda(D_k)$$

Idée pour la construction des D_k : on considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des carrés de la forme $[k_1 2^{-n}; (k_1 + 1)2^{-n}] \times [k_2 2^{-n}; (k_2 + 1)2^{-n}]$, avec $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. On prend comme D_k l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui sont inclus dans U_ϵ et qui ne sont pas inclus dans un autre élément de $\mathcal{E}$ inclus dans U_ϵ.
Soient $k_1, k_2, ...$ les indices des carrés ayant une intersection non-vide avec C_2. Puisque $C_2 \subset U_\epsilon$, on doit avoir $C_2 \subset \bigcup_s D_{k_s}$.
Pour tout s, il existe $x_0 \in C_2 \cap D_{k_s}$. Pour tout $x \in D_{k_s}$, d'après la question a), on a alors :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{||x - x_0||^2}{2} \sup_{z \in D_{k_s}} ||d^{(2)}f(z)|| \leq \frac{\mathrm{diam}^2(D_{k_s})}{2}\epsilon$$

L'ensemble $f(D_{k_s})$ est donc inclus dans le segment réel centré en $f(x_0)$ et de diamètre $\mathrm{diam}^2(D_{k_s})\epsilon = 2\epsilon\lambda(D_{k_s})$.
Donc $\lambda(f(D_{k_s})) \leq 2\epsilon\lambda(D_{k_s})$.
Donc $\lambda(f(C_2)) \leq 2\epsilon \sum_s \lambda(D_{k_s}) \leq 2\epsilon\lambda(\Omega) = 2\epsilon$.
En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient que $\lambda(f(C_2)) = 0$.

3. a) $dh(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial\rho}{\partial x_2}(x_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\det(dh(x_0)) = \frac{\partial\rho}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$ et le théorème d'inversion locale indique que h, restreint à un certain voisinage de x_0, est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme vers son image.

b) Si $x \in C_1$, $\rho(x) = 0$, puisque $df(x) = 0$ pour tout $x \in C_1$.
c) $dg(x_1, x_2) = df(h^{-1}(x_1, x_2)) \circ (dh(h^{-1}(x_1, x_2)))^{-1}$ donc, par définition de C_1, $dg(x_1, x_2) = 0$ si $h^{-1}(x_1, x_2) \in C_1$ (car alors $df(h^{-1}(x_1, x_2)) = 0$).
Puisque $g_1'(t) = \frac{\partial g}{\partial x_2}(0, t)$, on a $g_1'(t) = 0$ si $h^{-1}(0, t) \in C_1$ (car alors, comme on vient de le voir, $dg(0, t) = 0$ donc $\frac{\partial g}{\partial x_2}(0, t) = 0$). Donc t est un point critique de g_1.
d) Si $y \in C_1 \cap \mathcal{V}$, $h(y)$ est de la forme $(0, t)$, d'après la question b). D'après la question c), t est un point critique de g_1. Donc $f(y) = f(h^{-1}(0, t)) = g_1(t)$ est une valeur critique de g_1. D'après la question 1., l'ensemble des valeurs critiques de g_1 est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$ (g_1 n'est pas nécessairement définie sur $]0; 1[$ mais le résultat de la question 1. est en fait vrai pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$). Donc $f(C_1 \cap \mathcal{V})$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$.
e) Pour tout $x \in C_1 - C_2$, soit $\mathcal{V}_x$ un voisinage de x comme dans les questions précédentes, tel que $\lambda(f(C_1 \cap \mathcal{V}_x)) = 0$.
Pour tout compact $K \subset C_1 - C_2$, il existe un ensemble fini $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $K \subset \bigcup\limits_k C_1 \cap \mathcal{V}_{x_k}$.
Alors $\lambda(f(K)) \leq \sum\limits_k \lambda(f(C_1 \cap \mathcal{V}_{x_k})) = 0$.
Puisque $\lambda(C_1 - C_2) = \sup\limits_{K \subset C_1 - C_2 \text{ compact}} \lambda(K)$, on a aussi $\lambda(C_1 - C_2) = 0$.

4. Les points critiques de f sont exactement les éléments de C_1 (car $df(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est non-surjective si et seulement si elle est nulle). Donc la mesure de l'ensemble des valeurs critiques de f vaut :

$$\lambda(f(C_1)) \leq \lambda(f(C_1 - C_2)) + \lambda(f(C_2)) = 0$$