École Normale Supérieure — Traitement du signal
19 février 2015

Feuille d'exercices n^{o}1-2

Exercice 1 : propriétés de la transformée de Fourier
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On rappelle que sa transformée de Fourier est définie par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \qquad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

1. Montrer que la transformée de Fourier de f est continue et bornée.
2. a) On suppose que f est paire. Énoncer une propriété vérifiée par $\hat{f}$.
b) On suppose que f est à valeurs réelles. Énoncer une propriété vérifiée par $\hat{f}$.
3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On pose $g(t) = f(t - t_0)$. Exprimer $\hat{g}$ en fonction de $\hat{f}$.
4. a) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que f' est intégrable. Exprimer $\widehat{f'}$ en fonction de $\hat{f}$.
b) On suppose que $g : t \to t f(t)$ est intégrable. Exprimer $\hat{g}$ en fonction de $\hat{f}$.

Exercice 2 : inverse de la transformée de Fourier
On veut démontrer le résultat suivant : si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

1. Montrer que, pour tout t :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} e^{-(\epsilon\omega)^2} d\omega$$

2. Pour tout $\epsilon > 0$, on définit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g_\epsilon(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\epsilon} e^{-\frac{t^2}{4\epsilon^2}}$$

a) On admet que la transformée de Fourier de la fonction $G : t \to e^{-t^2}$ vaut :

$$\hat{G}(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$$

Calculer la transformée de Fourier de la fonction $t \to e^{-(\epsilon t)^2}$.
b) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} e^{-(\epsilon\omega)^2} d\omega = f \star g_\epsilon(t)$$

3. [Version simplifiée] On suppose que f est continue et bornée.
a) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\epsilon(t) dt$.
b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f \star g_\epsilon(t) \to f(t)$ quand $\epsilon \to 0$.

c) Conclure.

4. [Plus précis mais nettement plus difficile]
a) Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$H(y) = \int_{\mathbb{R}} |h(t-y) - h(t)| dt$$

Montrer que H est une fonction continue et bornée.
b) Montrer que $h \star g_\epsilon$ converge vers h dans L^1 lorsque $\epsilon \to 0$.
c) Montrer que, pour toute fonction $\tilde{h} \in L^1(\mathbb{R})$, $||\tilde{h} \star g_\epsilon||_1 \leq ||\tilde{h}||_1$.
d) Montrer que, pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{R})$, $h \star g_\epsilon$ converge vers h dans L^1.
[Indication : on pourra admettre qu'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^1$ à support compact qui converge vers h dans $L^1(\mathbb{R})$.]
e) Conclure.
[Indication : on pourra admettre que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge dans L^1 vers une limite f_∞, alors on peut en extraire une suite $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_{\phi(n)}(t) \overset{n\to\infty}{\to} f_\infty(t)$ pour presque tout t.]

Exercice 3 : stabilité et causalité des filtres rationnels
On considère un filtre dont la fonction de transfert $\hat{h}(\omega)$ vaut :

$$\hat{h}(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}$$

où P, Q sont des polynômes à coefficients réels, dont on note p, q les degrés.

1. a) Montrer que pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\omega) \to 0$ quand $\omega \to \pm\infty$.
b) Montrer que si h est un filtre stable (c'est-à-dire $h \in L^1(\mathbb{R})$), alors $p < q$.

2. Montrer qu'on peut écrire $\hat{h}$ sous la forme :

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{d=1}^{D_n} \frac{\alpha_{n,d}}{(\lambda_n - i\omega)^d}$$

avec $\Re(\lambda_n) \neq 0$ pour tout n.

3. a) On suppose que $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\Re(\lambda) < 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer la transformée de Fourier de :

$$h_{p,\lambda}(t) = t^p e^{\lambda t} 1_{t\geq 0}$$

b) On suppose que $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\Re(\lambda) > 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer la transformée de Fourier de :

$$h_{p,\lambda}(t) = t^p e^{\lambda t} 1_{t\leq 0}$$

c) Donner une expression explicite de h.

4. À quelle condition sur les pôles de P/Q le filtre h est-il causal et stable ?

5. Soient P, Q deux polynômes à coefficients réels tels que $d^\circ P < d^\circ Q$ et que Q n'a pas de racine imaginaire pure. Soit h le filtre dont la fonction de transfert est $\hat{h}(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}$.
On appelle $\omega \to |\hat{h}(\omega)|^2$ la puissance spectrale de h.
Montrer qu'il existe un filtre $\tilde{h}$ tel que :

(1) $\tilde{h}$ est stable et causal.

(2) sa transformée de Fourier est de la forme $\frac{\tilde{P}(i\omega)}{\tilde{Q}(i\omega)}$, avec $\tilde{P}, \tilde{Q}$ des polynômes à coefficients réels.

(3) $\tilde{h}$ et h ont la même puissance spectrale.

Exercice 4 : modulation d'amplitude

On suppose qu'on veut transmettre un signal $f(t)$, à valeurs réelles, tel que $\hat{f}(\omega) = 0$ si $|\omega| > \omega_0$. À la place de f, on transmet le signal :

$$g(t) = f(t)\cos(\nu_0 t)$$

où $\nu_0 \gg \omega_0$.

1. a) Dessiner la transformée de Fourier de g en fonction de celle de f.

b) Rappeler la méthode vue en cours pour démoduler le signal (c'est-à-dire pour reconstruire f à partir de g).

2. Dans cette question, on étudie une autre méthode de démodulation. On suppose qu'on a en fait transmis $g(t) = (1 + f(t))\cos(\nu_0 t)$ et on ajoute l'hypothèse que $|f(t)| < 1$ pour tout t.
Le démodulateur fonctionne de la manière suivante (pour τ un réel strictement positif). Il reçoit le signal g et renvoie un signal h qui est égal à g tant que $g + \frac{1}{\tau}g' \geq 0$. Si $g + \frac{1}{\tau}g'$ devient strictement négatif, alors h se met à vérifier l'équation différentielle $h + \frac{1}{\tau}h' = 0$. Cette équation reste vérifiée tant que $h > g$. Dès que l'inégalité $h > g$ n'est plus vérifiée, on a à nouveau $h = g$ et ainsi de suite.
Ce démodulateur peut être implémenté par un circuit électronique assez simple.
a) En prenant pour f une fonction sinusoïdale, dessinez g et h, dans le cas où $\omega_0 \ll 1/\tau \ll \nu_0$.
b) Comment ce système permet-t-il de démoduler g ? Pourquoi faut-il supposer $|f(t)| < 1$ pour tout t ?
c) Que se passe-t-il si $\omega_0 \not\ll 1/\tau$ ou si $1/\tau \not\ll \nu_0$?

Exercice 5 : transmission d'un signal stéréo

On modélise un signal stéréo par une paire de fonctions $\{G(t), D(t)\}$ à valeurs réelles et à bande limitée dans $\{|\omega| \leq F\}$.
On suppose fixé ω_0, un réel qu'on ne connaît pas exactement mais dont on sait qu'il est dans l'intervalle $]2F; 3F[$. On transmet le signal suivant :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$$

où $f_1(t) = \cos(\omega_0 t)$, $f_2(t) = G(t) + D(t)$ et $f_3(t) = \cos(2\omega_0 t)(G(t) - D(t))$.

1. Montrer que les trois composantes f_1, f_2 et f_3 ont des supports disjoints en fréquence.

2. On pose $s(t) = \cos(2\omega_0 t) f_3(t)$. Montrer que les transformées de Fourier de G, D et s vérifient la relation

$$\frac{1}{2}\left(\hat{G}(\omega) - \hat{D}(\omega)\right) = \hat{h}(\omega) \cdot \hat{s}(\omega),$$

où h est un filtre passe-bas que l'on précisera.

3. Proposer un schéma de reconstruction des signaux $G(t)$ et $D(t)$ à partir du signal $f(t)$, qui n'utilise que des opérateurs de filtrage, d'addition, de soustraction, de multiplication et l'opérateur $(x \to x^2)$.

4. On suppose maintenant que p est une fonction réelle dont la transformée de Fourier est à support dans $\{2F \leq |\omega| \leq 3F\}$. On transmet :

$$f(t) = p(t) + 2\left(p^2(t)G(t) + (1 - p^2(t))D(t)\right)$$

Montrer qu'il est toujours possible de reconstruire G et D.
[On autorise la division dans l'algorithme de reconstruction, à condition qu'on puisse raisonnablement espérer que ce par quoi on divise ne s'annule pas, lorsque p est « proche » d'un cosinus.]

Exercice 6 : modulation de fréquence pour un signal sinusoïdal

1. Soient $f_c, f_m > 0$ deux fréquences. Soit $\beta > 0$ un réel. On pose :

$$F(t) = \cos\left(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right)$$

Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| < +\infty$ et :

$$F(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \cos(2\pi(f_c + kf_m)t)$$

Donner l'expression des α_k en fonction de β et des fonctions de Bessel :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(nu - x\sin(u))} du \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

2. Plus généralement, si f est un signal tel que $\hat{f}$ est à support dans $[-A; A]$, la *modulation de fréquence* consiste à transmettre le signal :

$$F(t) = \cos\left(2\pi f_c t + \beta \int_0^t f(u)du\right)$$

pour une certaine fréquence f_c fixée.
À l'aide de la question 1., montrer que, pour espérer reconstruire f à partir de F, il faut transmettre les fréquences de F comprises dans une bande de largeur au moins proportionnelle à A.

Exercice 7 : fenêtrage

On souhaite estimer la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ à partir de ses valeurs sur un intervalle fini $[-a; a]$.

1. Calculer $\widehat{f1_{[-a;a]}}$ en fonction de $\hat{f}$.
2. Qu'obtient-on dans le cas $f = \cos(\omega_0 t)$?
3. Plus généralement, on approxime $\hat{f}$ par $\widehat{fW_a}$, pour une fonction W_a bien choisie, à support dans $[-a; a]$.

La fonction de Hann est la suivante :

$$W_a(t) = \begin{cases} (1 + \cos(\pi t/a))/2 & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Celle de Hamming est :

$$W_a(t) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\cos(\pi t/a) & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où α est un élément de $]0; 1[$, que Hamming conseille de prendre à peu près égal à $0,54$.
Justifier ces choix. Donner des exemples de fonctions f pour lesquelles $\hat{f}$ ne sera pas bien estimée.