

# Feuille d'exercices n°1-2

## Corrigé

### Exercice 1

1. La transformée de Fourier de  $f$  est bornée. En effet, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-i\omega t}| dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \end{aligned}$$

De plus,  $\hat{f}$  est continue, par le théorème de convergence dominée. En effet, si on note  $F(t, \omega) = f(t)e^{-i\omega t}$ , la fonction  $F$  est continue selon  $\omega$ . De plus, pour tous  $t, \omega$  :

$$|F(t, \omega)| = |f(t)|$$

Puisque  $t \rightarrow |f(t)|$  est une fonction intégrable qui ne dépend pas de  $\omega$ , les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées et on en déduit que la fonction  $\omega \rightarrow \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} F(t, \omega) dt$  est continue.

2. a) Pour tout  $\omega$  :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(-t)e^{-i(-\omega)(-t)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t')e^{-i(-\omega)t'} dt' \\ &= \hat{f}(-\omega) \end{aligned}$$

donc  $\hat{f}$  est paire.

b) Pour tout  $\omega$  :

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \overline{\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\omega t} dt} \\
 &= \overline{\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i(-\omega)t} dt} \\
 &= \hat{f}(-\omega)
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(t - t_0)e^{-i\omega t} dt \\
 &= e^{-i\omega t_0} \int_{\mathbb{R}} f(t - t_0)e^{-i\omega(t-t_0)} dt \\
 &= e^{-i\omega t_0} \int_{\mathbb{R}} f(t')e^{-i\omega t'} dt' \\
 &= e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega)
 \end{aligned}$$

4. a)

$$\begin{aligned}
 \widehat{f'}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= [f(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(t)(e^{-i\omega t})' dt \\
 &= i\omega \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= i\omega \hat{f}(\omega)
 \end{aligned}$$

b) Posons  $F(t, \omega) = f(t)e^{-i\omega t}$  pour tous  $\omega, t \in \mathbb{R}$ . Cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$  selon  $\omega$ . Sa dérivée selon  $\omega$  vaut  $\partial_{\omega} F(t, \omega) = -itf(t)e^{-i\omega t}$ .

Pour tout  $\omega$ ,  $|F(., \omega)| \leq |f|$ . De plus,  $|\partial_{\omega} F(., \omega)| \leq |g|$ . Puisque  $f$  et  $g$  sont intégrables, on peut appliquer à  $F$  le théorème de dérivation sous le signe somme :

$$\begin{aligned}
 \hat{f}'(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_{\omega} F(t, \omega) dt \\
 &= (-i) \int_{\mathbb{R}} tf(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= (-i)\hat{g}(\omega)
 \end{aligned}$$

donc  $\hat{g}(\omega) = i(\hat{f}')(\omega)$ .

## Exercice 2

1. Soit  $t$  fixé. Posons  $F(\omega, \epsilon) = \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}e^{-(\epsilon\omega)^2}$ , pour tout  $(\omega, \epsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Cette fonction est continue selon  $\epsilon$ .

De plus, pour tout  $\epsilon$ ,  $|F(\cdot, \epsilon)| \leq |\hat{f}|$ . Comme on a supposé que  $|\hat{f}|$  était intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :  $\epsilon \rightarrow \int_{\mathbb{R}} F(\omega, \epsilon)d\omega$  est continue.

En particulier, lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 :

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}e^{-(\epsilon\omega)^2}d\omega \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

2. a) Notons  $h$  cette fonction.

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(\epsilon t)^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(\epsilon t)^2} e^{-i(\omega/\epsilon)(\epsilon t)} dt \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-i(\omega/\epsilon)u} du \\ &= \frac{\hat{G}(\omega/\epsilon)}{\epsilon} = \frac{\sqrt{\pi}}{\epsilon} e^{-\omega^2/(4\epsilon^2)} \end{aligned}$$

b) En définissant  $h$  comme en a) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}e^{-(\epsilon\omega)^2}d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-i\omega u} du \right) e^{i\omega t}e^{-(\epsilon\omega)^2} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-(\epsilon\omega)^2} e^{-i(u-t)\omega} d\omega du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-(\epsilon\omega)^2} e^{-i(u-t)\omega} d\omega \right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{h}(u-t)du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-(t-u)^2/(4\epsilon^2)} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u)g_{\epsilon}(t-u)du = f \star g_{\epsilon}(t) \end{aligned}$$

3. a)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g_{\epsilon}(t)dt &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(t/2\epsilon)^2} \frac{dt}{2\epsilon} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} G(t)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hat{G}(0) = 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
f \star g_\epsilon(t) - f(t) &= f \star g_\epsilon(t) - f(t) \int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(u) du \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t-u) \frac{e^{-u^2/(4\epsilon^2)}}{2\sqrt{\pi}\epsilon} du - \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{e^{-u^2/(4\epsilon^2)}}{2\sqrt{\pi}\epsilon} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} (f(t-2\epsilon(u/2\epsilon)) - f(t)) \frac{e^{-(u/2\epsilon)^2}}{\sqrt{\pi}} \frac{du}{2\epsilon} \\
&= \int_{\mathbb{R}} (f(t-2\epsilon s) - f(t)) \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}} ds
\end{aligned}$$

Posons, pour tout  $(s, \epsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ,  $F(s, \epsilon) = (f(t-2\epsilon s) - f(t)) \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}$ . Cette fonction est continue selon  $\epsilon$ . De plus, pour tous  $\epsilon$  et  $s$  :

$$|F(s, \epsilon)| \leq 2\|f\|_\infty \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}$$

La fonction  $s \rightarrow 2\|f\|_\infty \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}$  est intégrable et ne dépend pas de  $\epsilon$ . On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée : la fonction  $\epsilon \rightarrow \int_{\mathbb{R}} F(s, \epsilon) ds$  est continue.

En particulier, quand  $\epsilon \rightarrow 0$  :

$$\int_{\mathbb{R}} (f(t-2\epsilon s) - f(t)) \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}} ds = \int_{\mathbb{R}} F(s, \epsilon) ds \rightarrow \int_{\mathbb{R}} F(s, 0) ds = 0$$

Donc  $f \star g_\epsilon(t) - f(t) \rightarrow 0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

c) La combinaison des questions 1., 2.b) et 3.b) donne le résultat.

4. a) Elle est bornée car :

$$0 \leq H(y) \leq \int_{\mathbb{R}} (|h(t-y)| + |h(t)|) dt = 2 \int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt < +\infty$$

Montrons qu'elle est continue. Supposons que le support de  $h$  est inclus dans  $[-M; M]$ . Notons  $\|h'\|$  le maximum de la dérivée de  $h$ .

Soit  $y_0 \in \mathbb{R}$  quelconque. Montrons que  $H(y) \rightarrow H(y_0)$  quand  $y \rightarrow y_0$ .

$$\begin{aligned}
|H(y) - H(y_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (|h(t-y) - h(t)| - |h(t-y_0) - h(t)|) dt \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |h(t-y) - h(t-y_0)| dt \\
&= \int_{-M-\max(|y|, |y_0|)}^{M+\max(|y|, |y_0|)} |h(t-y) - h(t-y_0)| dt \\
&\leq \int_{-M-\max(|y|, |y_0|)}^{M+\max(|y|, |y_0|)} \|h'\|_\infty |y - y_0| dt \\
&\leq 2(M + \max(|y|, |y_0|)) \|h'\|_\infty |y - y_0| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

b) Pour tout  $t$ , comme on l'a vu en 3.b) :

$$h \star g_\epsilon(t) - h(t) = \int_{\mathbb{R}} (h(t - 2\epsilon s) - h(t)) \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}} ds$$

donc, lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 :

$$\begin{aligned} \|h \star g_\epsilon - h\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |h \star g_\epsilon(t) - h(t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (h(t - 2\epsilon s) - h(t)) \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}} ds \right| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |h(t - 2\epsilon s) - h(t)| \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}} ds dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} H(2\epsilon s) \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}} ds \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

La dernière ligne est une conséquence du théorème de convergence dominée, appliqué à  $(s, \epsilon) \rightarrow H(2\epsilon s) \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}$ , qui est dominée par  $s \rightarrow \|H\|_\infty \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}$ .

c)

$$\begin{aligned} \|g_\epsilon \star \tilde{h}\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |g_\epsilon \star \tilde{h}(t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(u) \tilde{h}(t - u) du \right| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(u) |\tilde{h}(t - u)| du dt \\ &= \|\tilde{h}\|_1 \int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(u) du \\ &= \|\tilde{h}\|_1 \end{aligned}$$

d) Soit  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  et à support compact qui converge vers  $h$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ .

Soit  $\eta > 0$  quelconque. Soit  $n$  tel que  $\|h_n - h\|_1 \leq \eta/3$ .

$$\begin{aligned} \|g_\epsilon \star h - h\|_1 &\leq \|g_\epsilon \star h - g_\epsilon \star h_n\|_1 + \|g_\epsilon \star h_n - h_n\|_1 + \|h_n - h\|_1 \\ &= \|g_\epsilon \star (h - h_n)\|_1 + \|g_\epsilon \star h_n - h_n\|_1 + \|h_n - h\|_1 \\ &\leq \|g_\epsilon \star h_n - h_n\|_1 + 2\|h_n - h\|_1 \\ &\leq \|g_\epsilon \star h_n - h_n\|_1 + 2\eta/3 \end{aligned}$$

D'après la question a),  $\|g_\epsilon \star h_n - h_n\|_1 \rightarrow 0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$  donc, pour tout  $\epsilon$  assez petit :

$$\|g_\epsilon \star h - h\|_1 < \eta$$

e) D'après la question précédente,  $f \star g_{1/n}$  converge vers  $f$  dans  $L^1$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . D'après l'indication, il existe une extraction  $\phi$  telle que  $f \star g_{1/\phi(n)}$  converge vers  $f$  presque partout. D'après les questions 1. et 2.b), on a, pour tout  $t$  :

$$f \star g_{1/\phi(n)}(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Donc, pour presque tout  $t$  :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

### Exercice 3

1. a) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions  $\mathcal{C}^1$  et à support compact convergeant vers  $f$  dans  $L^1$ . Pour tout  $n$ ,  $\hat{f}_n$  tend vers 0 en  $\pm\infty$ . En effet, d'après la question 4.a) de l'exercice 1,  $\widehat{f'_n}(\omega) = i\omega \hat{f}_n(\omega)$ . D'après la question 1. de l'exercice 1,  $\widehat{f'_n}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $\hat{f}_n(\omega) = \frac{1}{i\omega} \widehat{f'_n}(\omega)$  tend vers 0 quand  $\omega \rightarrow \pm\infty$ .

Puisque  $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1$ ,  $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $\hat{f}$ . La convergence étant uniforme, on peut intervertir les limites :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \hat{f}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}_n(\omega) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \hat{f}_n(\omega) \right) = 0$$

De même en  $-\infty$ .

b) D'après le a), si  $h \in L^1$ , alors  $\hat{h}(\omega) \rightarrow 0$  quand  $\omega \rightarrow +\infty$ .

Notons  $c_P$  et  $c_Q$  les coefficients dominants de  $P$  et  $Q$ . Quand  $\omega \rightarrow +\infty$  :

$$|\hat{h}(\omega)| \sim \frac{|c_P| \omega^p}{|c_Q| \omega^q} = \frac{|c_P|}{|c_Q|} \omega^{p-q}$$

Ceci tend vers 0 si et seulement si  $p < q$ .

2. Quitte à diviser par le plus grand dénominateur commun, on peut supposer que  $P$  et  $Q$  n'ont pas de racine commune.

On peut écrire :

$$Q(X) = \prod_{n=1}^N (X - \lambda_n)^{D_n}$$

où les  $\lambda_n$  sont les racines (distinctes) de  $Q$  et les  $D_n$  leurs multiplicités.

On peut décomposer  $\frac{P}{Q}$  en éléments simples : il existe des complexes  $\alpha_{n,d}$  tels que :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{n=1}^N \sum_{d=1}^{D_n} \frac{\alpha_{n,d}}{(\lambda_n - X)^d}$$

Il n'y a pas de terme polynomial dans la décomposition en éléments simples car on a vu que le degré de  $P$  était strictement inférieur au degré de  $Q$ .

En évaluant pour  $X = i\omega$ , on a le résultat demandé.

Pour tout  $n$ ,  $\Re(\lambda_n) \neq 0$ , sinon  $Q$  a une racine imaginaire pure et  $\hat{h}$  a un pôle (puisqu'on a supposé que  $P$  et  $Q$  n'avait pas de racine commune, si  $Q(i\omega_0) = 0$ ,  $\hat{h}$  diverge en  $\omega_0$ ). C'est impossible car  $\hat{h}$  est la transformée de Fourier d'une fonction de  $L^1$  donc est continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. a) Remarquons d'abord que, si  $\Re(\lambda) < 0$ ,  $h_{p,\lambda}$  décroît exponentiellement quand  $|t| \rightarrow \infty$  donc  $h_{p,\lambda}$  est dans  $L^1$  et sa transformée de Fourier est bien définie.

Commençons par le cas où  $p = 0$ .

$$\begin{aligned}\hat{h}_{0,\lambda}(\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} e^{-i\omega t} dt \\ &= \left[ \frac{e^{(\lambda-i\omega)t}}{\lambda-i\omega} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda-i\omega}\end{aligned}$$

Traisons maintenant le cas  $p \in \mathbb{N}$ . On sait que  $\widehat{t^p f(t)} = i^p \hat{f}^{(p)}$ . On peut donc vérifier par récurrence que, pour tout  $p$  :

$$\hat{h}_{p,\lambda}(\omega) = \frac{(-1)^p}{(\lambda-i\omega)^{p+1}} (p!)$$

b)  $h_{p,\lambda}(t) = (-1)^p h_{p,-\lambda}(-t)$  donc, d'après le calcul de la question précédente (et en utilisant le fait que, pour toute  $g \in L^1$ ,  $\widehat{g(-\cdot)} = \hat{g}(-\cdot)$ ) :

$$\hat{h}_{p,\lambda}(\omega) = (-1)^p \frac{(-1)^p (p!)}{(-\lambda+i\omega)^{p+1}} = \frac{(-1)^{p+1}}{(\lambda-i\omega)^{p+1}} (p!)$$

c)  $\hat{h}(\omega) = \sum_n \sum_d (-1)^{d-1} \epsilon_d \frac{\alpha_{n,d}}{(d-1)!} h_{d-1,\lambda_n}(\omega)$  (où  $\epsilon_d$  vaut 1 si  $\Re(\lambda_n) < 0$  et  $-1$  sinon) donc :

$$h(t) = \sum_n \sum_d \epsilon_d \frac{\alpha_{n,d}}{(d-1)!} h_{d-1,\lambda_n}(t)$$

4. Le filtre est causal si et seulement si  $h(t) = 0$  lorsque  $t < 0$ .

D'après la question précédente :

$$\forall t < 0, \quad h(t) = \sum_{n \text{ tq } \Re(\lambda_n) > 0} \sum_d \epsilon_d \frac{\alpha_{n,d}}{(d-1)!} t^{d-1} e^{\lambda_n t}$$

Pour que cette dernière fonction soit identiquement nulle, il faut et suffit que  $\alpha_{n,d} = 0$  pour tout  $n$  tel que  $\Re(\lambda_n) > 0$ .

C'est équivalent au fait que  $\hat{h}$  est une somme de  $\frac{\alpha_{n,d}}{\lambda_n - i\omega}$  avec  $\Re(\lambda_n) < 0$  pour tout  $n$ . C'est donc équivalent au fait que tous les pôles de  $P/Q$  sont de partie réelle strictement négative.

Dans ce cas,  $h$  est une somme de fonctions de la forme  $t^p e^{\lambda t} 1_{t \geq 0}$ . Il s'agit donc d'une fonction de  $L^1$  (c'est-à-dire stable).

La condition que les pôles de  $P/Q$  soient de partie réelle strictement négative est donc équivalente au fait que le filtre soit causal et stable.

5. Écrivons  $Q$  comme produit de polynômes de degré 1 :  $Q(\omega) = c_Q \prod_n (\omega - \lambda_n)$ .

Pour tout  $n$  et tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $|i\omega - \lambda_n|^2 = |\overline{i\omega - \lambda_n}|^2 = |i\omega + \bar{\lambda}_n|^2$ .

Pour tout  $n$ , posons  $\mu_n = \lambda_n$  si  $\Re(\lambda_n) < 0$  et  $\mu_n = -\bar{\lambda}_n$  sinon. D'après la remarque qui précède,  $|i\omega - \lambda_n|^2 = |i\omega - \mu_n|^2$  pour tout  $n$ . De plus,  $\Re(\mu_n) < 0$  pour tout  $n$ . Posons  $Q = c_Q \prod_n (\omega - \mu_n)$ . Alors, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $|\tilde{Q}(i\omega)|^2 = |Q(i\omega)|^2$ . Notons  $\tilde{h}$  la fonction telle que :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{\tilde{h}}(\omega) = \frac{P(i\omega)}{\tilde{Q}(i\omega)}$$

D'après ce qui précède,  $h$  et  $\tilde{h}$  ont la même fréquence spectrale. Puisque les  $\mu_n$  sont de partie réelle strictement négative,  $\tilde{h}$  est stable et causal, d'après la question 4.

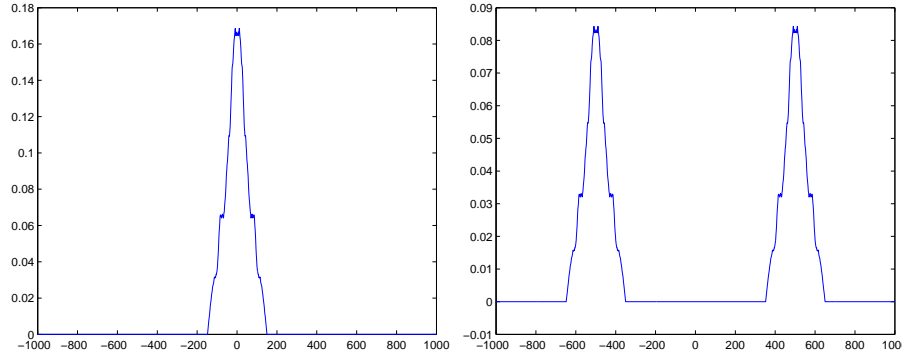
Le polynôme  $\tilde{Q}$  est toujours à coefficients réels. En effet, si  $Q$  est à coefficients réels, on peut écrire  $Q(X) = \prod_n (X - \lambda_n^{(1)}) \prod_n (X - \lambda_n^{(2)}) (X - \overline{\lambda_n^{(2)}})$ , où les  $\lambda_n^{(1)}$  sont les racines réels de  $Q$  et les  $\lambda_n^{(2)}, \overline{\lambda_n^{(2)}}$  sont celles qui ne sont pas réelles. On vérifie alors que :

$$\tilde{Q}(X) = \prod_n (X - \mu_n^{(1)}) \prod_n (X - \mu_n^{(2)}) (X - \overline{\mu_n^{(2)}})$$

Donc  $\tilde{Q}$  est aussi à coefficients réels.

#### Exercice 4

1. a) Seule la partie réelle de la transformée de Fourier est représentée. On a pris  $\omega_0 = 150$  et  $\nu_0 = 500$ .



b) On note  $h(t) = 2g(t) \cos(\nu_0 t)$ . On a alors  $h(t) = 2f(t) \cos^2(\nu_0 t) = f(t)(1 + \cos(2\nu_0 t))$ .

Puisque  $\cos(2\nu_0 t) = \frac{e^{2i\nu_0 t} + e^{-2i\nu_0 t}}{2}$ , la transformée de Fourier de  $\tilde{f} : t \rightarrow f(t) \cos(2\nu_0 t)$  est  $\omega \rightarrow \frac{\hat{f}(\omega + 2\nu_0) + \hat{f}(\omega - 2\nu_0)}{2}$ .

Son support est donc inclus dans  $[-2\nu_0 - \omega_0; -2\nu_0 + \omega_0] \cup [2\nu_0 - \omega_0; 2\nu_0 + \omega_0]$ . Puisque  $\nu_0 \gg \omega_0$ , ce support n'intersecte pas  $[-\omega_0; \omega_0]$ .

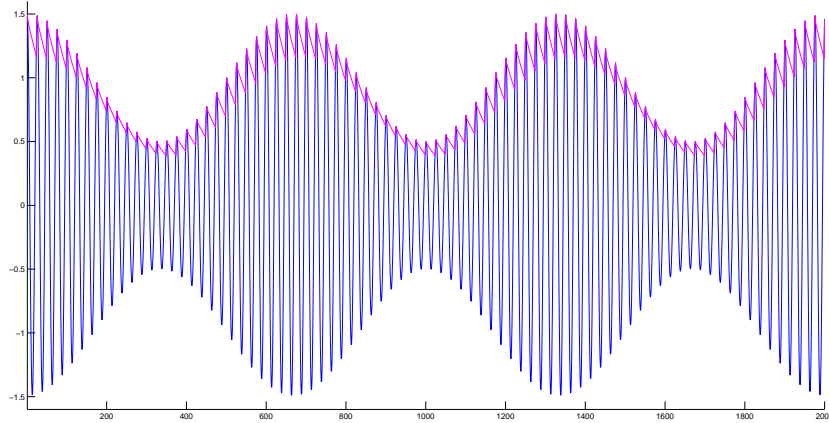
Notons  $\gamma$  le filtre dont la transformée de Fourier est  $\hat{\gamma}(\omega) = 1_{[-\omega_0; \omega_0]}$ . On a  $\tilde{f} \star \gamma = 0$ , puisque la transformée de Fourier de  $\tilde{f} \star \gamma$  est  $\hat{\tilde{f}} \hat{\gamma} = 0$ .

En revanche,  $f \star \gamma = f$  car  $\hat{f} \star \hat{\gamma} = \hat{f} \hat{\gamma} = \hat{f}$ .

Donc  $f = f \star \gamma + \tilde{f} \star \gamma = h \star \gamma$ . Pour démoduler, il suffit de multiplier  $g$  par  $2 \cos(\nu_0 t)$  (ce qui donne  $h$ ) puis de convoler par  $\gamma$ .

2. a) Le signal  $g$  est représenté en bleu et le signal  $h$  en magenta.

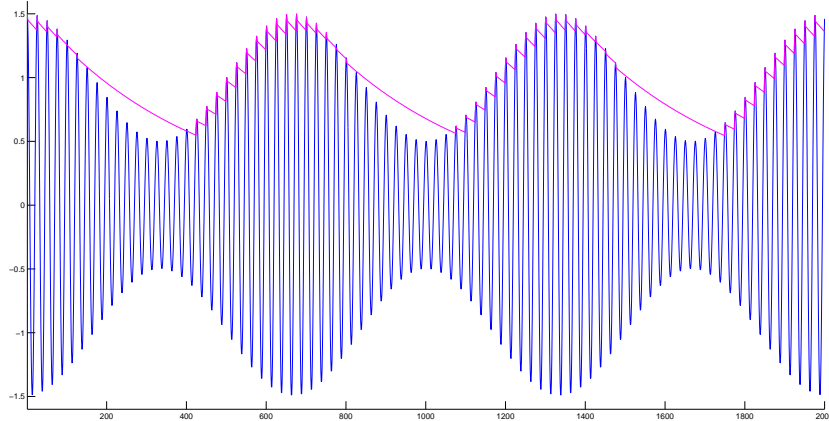




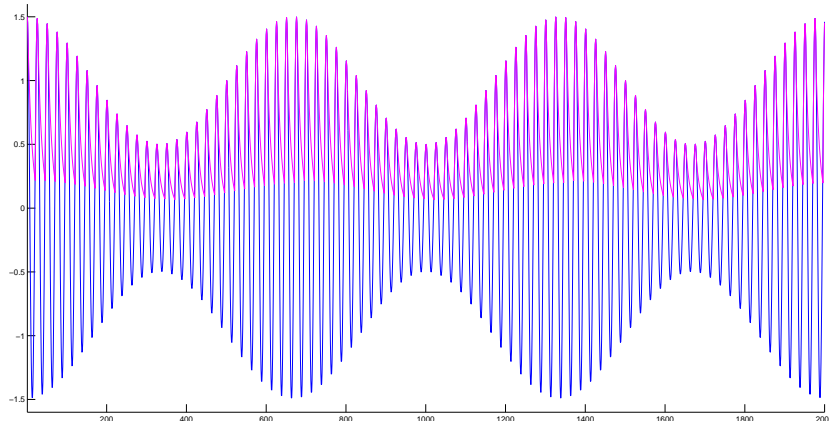
b) Le signal  $h$  est à peu près égal à « l'enveloppe » de  $g$ , c'est-à-dire qu'on a à peu près  $h(t) = |1 + f(t)|$ . Si  $|f(t)| < 1$ , on a alors  $h(t) \approx 1 + f(t)$ , donc on peut reconstruire  $f$  à partir de  $h$  en lui soustrayant simplement 1.

Si  $|f(t)| \not< 1$ , on n'a pas nécessairement  $1 + f(t) \geq 0$ . Aux endroits où  $f(t)$  est inférieure à  $-1$ , on a  $h(t) \approx f(t) - 1$  et non  $h(t) \approx 1 - f(t)$ .

c) Si  $1/\tau \not\gg \omega_0$ , la fonction exponentielle  $e^{-t/\tau}$  peut décroître plus lentement que  $f$  ne varie et  $h$  risque de ne plus suivre l'enveloppe de  $g$ , comme sur la figure qui suit.



Si  $1/\tau \not\ll \nu_0$ , le signal  $h$  est oscillant (de fréquence  $\nu_0$ ). Sa composante basses fréquences est toujours proportionnelle à  $|1 + f|$  mais elle est moins audible.



### Exercice 5

1. La transformée de Fourier de  $f_1$  est  $\pi(\delta_{-\omega_0} + \delta_{\omega_0})$ . Elle est à support dans  $[-3F; -2F] \cup [2F; 3F]$ .

La transformée de Fourier de  $f_2$  est  $\hat{G} + \hat{D}$ . Elle est à support dans  $[-F; F]$ .

La transformée de Fourier de  $f_3$  est :

$$\begin{aligned}\hat{f}_3(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f_3(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (e^{2i\omega_0 t} + e^{-2i\omega_0 t}) (G(t) - D(t)) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} ((\hat{G} - \hat{D})(\omega - 2\omega_0) + (\hat{G} - \hat{D})(\omega + 2\omega_0))\end{aligned}$$

La fonction  $(\hat{G} - \hat{D})(\omega - 2\omega_0)$  est à support dans  $[-F + 2\omega_0; F + 2\omega_0] \subset [3F; 7F]$  et la fonction  $(\hat{G} - \hat{D})(\omega + 2\omega_0)$  est à support dans  $[-F - 2\omega_0; F - 2\omega_0] \subset [-7F; -3F]$ . Le support de  $\hat{f}_3$  est donc inclus dans  $[-7F; -3F] \cup [3F; 7F]$ .

Les trois supports sont bien disjoints.

2. De même que précédemment,  $\hat{s}(t) = \frac{1}{2} (\hat{f}_3(t - 2\omega_0) + \hat{f}_3(t + 2\omega_0))$ . En utilisant l'expression trouvée à la question précédente, on obtient :

$$\hat{s}(\omega) = \frac{1}{4} (\hat{G} - \hat{D})(\omega - 4\omega_0) + \frac{1}{2} (\hat{G} - \hat{D})(\omega) + \frac{1}{4} (\hat{G} - \hat{D})(\omega + 4\omega_0)$$

La fonction  $\frac{1}{4} (\hat{G} - \hat{D})(\omega + 4\omega_0)$  est à support inclus dans  $[-13F; -7F]$  et  $\frac{1}{4} (\hat{G} - \hat{D})(\omega - 4\omega_0)$  à support inclus dans  $[7F; 13F]$ . Puisque  $\hat{G} - \hat{D}$  est à support dans  $[-F; F]$ , on a, pour tout  $\omega$  :

$$\hat{s}(\omega) 1_{[-F; F]}(\omega) = \frac{1}{2} (\hat{G} - \hat{D})(\omega)$$

On pose  $\hat{h}(\omega) = 1_{[-F; F]}(\omega)$ .

3. On définit  $h$  comme dans la question précédente. On définit  $l_1$  et  $l_2$  les filtres passe-bandes correspondant aux transformées de Fourier suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{l}_1(\omega) &= 1_{[-3F; -2F]}(\omega) + 1_{[2F; 3F]}(\omega) \\ \hat{l}_2(\omega) &= 1_{[-7F; -3F]}(\omega) + 1_{[3F; 7F]}(\omega)\end{aligned}$$

- On calcule  $G(t) + D(t) = h \star f$ .
- On calcule  $\cos(\omega_0 t) = l_1 \star f$ .
- On calcule  $\cos^2(\omega_0 t) = \frac{\cos(2\omega_0 t) + 1}{2}$ .
- On calcule  $f_3(t) = l_2 \star f$ .
- On calcule  $g(t) = \cos^2(\omega_0 t) f_3(t) = \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t) f_3(t) + \frac{1}{2} f_3(t)$ .
- On calcule  $\frac{1}{4} (G - D) = h \star g$ .
- On calcule  $G = \frac{1}{2} (G + D) + 2 \cdot \frac{1}{4} (G - D)$  et  $D = \frac{1}{2} (G + D) - 2 \cdot \frac{1}{4} (G - D)$ .

4. Notons  $q$  la fonction dont la transformée de Fourier est  $\hat{p}1_{\omega \geq 0}$ . Puisque  $p$  est réelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \hat{p}(-x) = \overline{\hat{p}(x)}$$

On a donc  $\hat{p}(x) = \hat{q}(x) + \overline{\hat{q}(-x)}$ , c'est-à-dire  $p = q + \bar{q}$ .

Cela donne :

$$\begin{aligned} f &= q + \bar{q} + 2((q^2 + 2|q|^2 + \bar{q}^2)G + (1 - q^2 - 2|q|^2 - \bar{q}^2)D) \\ &= 2\bar{q}^2(G - D) + \bar{q} + (2|q|^2G + (1 - 2|q|^2)D) + q + 2q^2(G - D) \end{aligned}$$

Calculons les supports des transformées de Fourier des différentes fonctions apparaissant dans cette expression. On utilise le fait que, si  $g_1$  et  $g_2$  sont deux fonctions telles que  $\hat{g}_1$  est à support dans  $[A_1; B_1]$  et  $\hat{g}_2$  est à support dans  $[A_2; B_2]$ , alors  $\widehat{g_1 g_2} = \frac{1}{2\pi} \hat{g}_1 \star \hat{g}_2$  est à support dans  $[A_1 + A_2; B_1 + B_2]$ .

La transformée de Fourier de  $q^2$  est à support dans  $[4F; 6F]$ . La transformée de Fourier de  $q^2(G - D)$  est donc à support dans  $[3F; 7F]$ .

De même, la transformée de Fourier de  $\bar{q}^2(G - D)$  est à support dans  $[-7F; -3F]$ .

La transformée de Fourier de  $(2|q|^2G + (1 - 2|q|^2)D)$  est à support dans  $[-2F; 2F]$ .

On utilise pour l'algorithme de reconstruction les filtres  $h_1, h_2, l_1, l_2$  suivants :

$$\begin{aligned} \hat{h}_1 &= 1_{[-2F; 2F]} & \hat{h}_2 &= 1_{[-3F; 3F]} \\ \hat{l}_1 &= 1_{[-3F; -2F] \cup [2F; 3F]} & \hat{l}_2 &= 1_{[-7F; -3F] \cup [3F; 7F]} \end{aligned}$$

Un algorithme de reconstruction est alors :

- On calcule  $f \star h_1 = (2|q|^2G + (1 - 2|q|^2)D)$ .
- On calcule  $p = q + \bar{q} = l_1 \star f$ .
- On calcule  $p^2 = \bar{q}^2 + 2|q|^2 + q^2$  puis  $\bar{q}^2 + q^2 = p^2 \star l_2$  et  $2|q|^2 = p^2 \star h_1$ .
- On calcule  $2(q^2 + \bar{q}^2)(G - D) = l_2 \star f$ .
- On calcule  $g \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{q}^2 + q^2).2(q^2 + \bar{q}^2)(G - D) = 2(\bar{q}^4 + 2|q|^4 + q^4)(G - D)$ .
- On calcule  $4|q|^4(G - D) = h_2 \star g$ .
- On calcule  $D = (2|q|^2G + (1 - 2|q|^2)D) - \frac{4|q|^4(G - D)}{2|q|^2}$ .
- On calcule  $G = D + \frac{4|q|^4(G - D)}{(2|q|^2)^2}$ .

Dans le cas où  $p(t) = \cos(\omega_0 t)$ , on a  $q(t) = \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}$  donc  $|q(t)|^2 = \frac{1}{4}$  ne s'annule pas.

## Exercice 6

1. On a  $F(t) = \cos(2\pi f_c t) \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) - \sin(2\pi f_c t) \sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$ .

Notons  $f_1(t) = \cos(\beta \sin(2\pi f_m t))$  et  $f_2(t) = \sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$ . Puisque ces fonctions sont  $1/f_m$ -périodiques et de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$f_1(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^{(1)} e^{2\pi i f_m l t} \quad f_2(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^{(2)} e^{2\pi i f_m l t}$$

et les séries convergent normalement :  $\sum_l |a_l^{(1)}| < +\infty$  et  $\sum_l |a_l^{(2)}| < +\infty$ .

$$\begin{aligned} a_l^{(1)} &= f_m \int_0^{1/f_m} f_1(t) e^{-2\pi i f_m l t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(t/(2\pi f_m)) e^{-ilt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e^{-i(lt-\beta \sin(t))} + e^{-i(lt+\beta \sin(t))}) dt \\ &= \frac{1}{2} (J_l(\beta) + J_l(-\beta)) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} a_l^{(2)} &= f_m \int_0^{1/f_m} f_2(t) e^{-2\pi i f_m l t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2i} (e^{-i(lt-\beta \sin(t))} - e^{-i(lt+\beta \sin(t))}) dt \\ &= \frac{1}{2i} (J_l(\beta) - J_l(-\beta)) \end{aligned}$$

Remarquons en faisant le changement de variable  $u \leftrightarrow -u$  que :

$$J_n(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(nu+x \sin(u))} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i((-n)u-x \sin(u))} du = J_{-n}(x)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} f_1(t) &= J_0(\beta) + \sum_{l \in \mathbb{N}^*} (J_l(\beta) + J_{-l}(\beta)) \cos(2\pi f_m l t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} J_l(\beta) \cos(2\pi f_m l t) \\ f_2(t) &= \sum_{l \in \mathbb{N}^*} (J_l(\beta) - J_{-l}(\beta)) \sin(2\pi f_m l t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} J_l(\beta) \sin(2\pi f_m l t) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} J_l(\beta) (\cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_m l t) - \sin(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_m l t)) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} J_l(\beta) \cos(2\pi (f_c + l f_m) t) \end{aligned}$$

2. On veut notamment pouvoir reconstruire  $f$  lorsque  $f(t) = \cos(2\pi f_m t)$ , avec  $f_m \in [-\frac{A}{2\pi}; \frac{A}{2\pi}]$ . Dans ce cas, le signal transmis est le  $F(t) = \cos(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t))$  de la question 1. D'après la question 1., cette fonction  $F$  a un spectre à raies, avec des pics aux fréquences  $\pm 2\pi(f_c + k f_m)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

Le coefficient des pics de fréquences  $2\pi f_c$  et  $-2\pi f_c$  ne dépend pas de  $f$ . Si on veut identifier  $f$  (c'est-à-dire, ici,  $f_m$ ), il faut donc que la bande de fréquences transmises de  $F$  contienne au moins l'un des  $2\pi(f_c + k f_m)$  pour  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .

Ceci étant vrai pour tout  $f_m \in [-\frac{A}{2\pi}; \frac{A}{2\pi}]$ , la bande de fréquences transmise doit être de largeur au moins  $A/2$ .

### Exercice 7

1.  $\widehat{f1_{[-a;a]}} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} \star \hat{1}_{[-a;a]}$

Comme  $\hat{1}_{[-a;a]}(\omega) = \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx = 2 \frac{\sin(\omega a)}{\omega}$ , cela donne :

$$\widehat{f1_{[-a;a]}} = \hat{f} \star \left( \omega \rightarrow \frac{\sin(a\omega)}{\pi\omega} \right)$$

2. Puisque  $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$  et puisque la transformée de Fourier de la fonction  $x \rightarrow e^{i\alpha x}$  est le dirac  $2\pi\delta_\alpha$ , on a :

$$\begin{aligned} \widehat{f1_{[-a;a]}}(\nu) &= (\pi\delta_{\omega_0} + \pi\delta_{-\omega_0}) \star \left( \omega \rightarrow \frac{\sin(a\omega)}{\pi\omega} \right) (\nu) \\ &= \frac{\sin(a(\omega - \omega_0))}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(a(\omega + \omega_0))}{\omega + \omega_0} \end{aligned}$$

Pour  $a$  assez grand, la transformée de Fourier a bien deux « pics », comme celle de  $f$ , mais les valeurs en-dehors des pics ne tendent pas vers 0 quand  $a \rightarrow +\infty$ . L'approximation de  $\hat{f}$  fournie par  $\widehat{f1_{[-a;a]}}$  n'est donc pas satisfaisante.

3. Calculons les transformées de Fourier de ces fonctions.

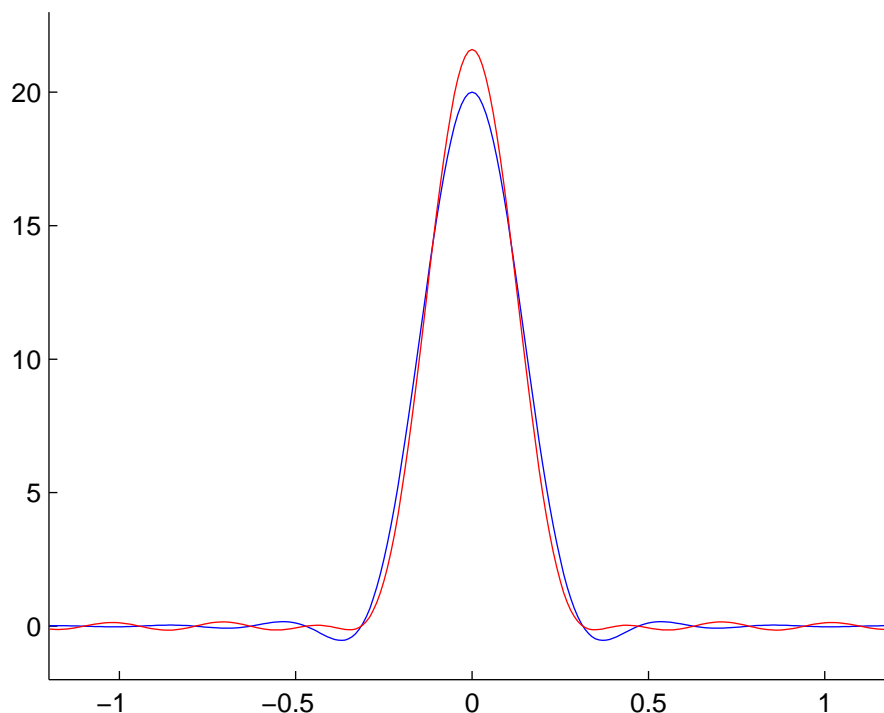
Pour la fonction de Hann :

$$\begin{aligned} \hat{W}_a(\omega) &= \int_{-a}^a W_a(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left( e^{-i\omega t} + \frac{e^{i(\pi/a - \omega)t} + e^{i(-\pi/a - \omega)t}}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega} + \frac{\sin(\pi - \omega a)}{\pi/a - \omega} + \frac{\sin(\pi + \omega a)}{\pi/a + \omega} \right) \\ &= \frac{\sin(\omega a)}{2} \left( \frac{2}{\omega} + \frac{1}{\pi/a - \omega} - \frac{1}{\pi/a + \omega} \right) \\ &= \frac{(\pi/a)^2 \sin(\omega a)}{\omega(\pi/a - \omega)(\pi/a + \omega)} \end{aligned}$$

Pour la fonction de Hamming :

$$\begin{aligned} \hat{W}_a(\omega) &= \int_{-a}^a W_a(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{2\alpha \sin(\omega a)}{\omega} + (1 - \alpha) \left( \frac{\sin(\pi - \omega a)}{\pi/a - \omega} + \frac{\sin(\pi + \omega a)}{\pi/a + \omega} \right) \\ &= \sin(\omega a) \frac{2\alpha(\pi/a)^2 + 2(1 - 2\alpha)\omega^2}{\omega(\pi/a - \omega)(\pi/a + \omega)} \end{aligned}$$

La figure suivante montre la transformée de Fourier de la fonction de Hann (en bleu) et de celle de Hamming (en rouge), pour  $a = 20$  et  $\alpha = 0.54$ .



La transformée de Fourier de la fonction de Hann décroît en  $(\frac{\pi}{a})^2 \frac{1}{\omega^3}$  (la raison pour laquelle elle décroît plus vite que la fenêtre des questions 1. et 2. est qu'elle est beaucoup plus régulière : elle est  $\mathcal{C}^1$  alors que la précédente n'était même pas continue). À  $\omega$  constant,  $\hat{W}_a(\omega)$  décroît en  $a^{-2}$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .

On n'a donc pas avec  $W_a$  le problème qu'on avait dans la question 2 : si on s'en sert pour évaluer la transformée de Fourier d'une fonction dont la transformée de Fourier est composée de diracs (ou, plus généralement, de pics) assez espacés, la transformée de Fourier approximée sera bien composée de pics, avec des valeurs entre les pics qui tendront rapidement vers 0 en  $+\infty$ .

La fonction de Hamming n'a pas cette qualité (car elle n'est pas continue). En revanche, le fait de prendre  $\alpha \neq 1/2$  permet de diminuer l'amplitude de la première bosse de  $\hat{W}_a$  après la bosse principale.

Elle est donc plus adaptée au cas des fonctions dont la transformée de Fourier contient des pics assez proches en fréquences. On pourra distinguer ces pics pour une valeur de  $a$  plus petite que celle qu'on devrait prendre avec une fenêtre de Hann.