École Normale Supérieure — Traitement du signal

12 mars 2015

Feuille d'exercices n°4

Exercice 1

1. Le tableau ci-dessous résume les propriétés de la transformée de Fourier pour différents types de signaux. Complétez les cases blanches.

	Signal continu	Signal discret	Signal fini
Définition	$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}dt$	$\hat{f}(r) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f(k)e^{-ikr}$	$\hat{f}(n) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-\frac{2\pi ink}{N}}$
Formule d'inversion	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$		$f(k) = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\hat{f}(n)e^{\frac{2\pi ink}{N}}$
Convolution	$\widehat{f\star g} = \hat{f}.\hat{g}$	$\widehat{f\star g} = \hat{f}.\hat{g}$	$\widehat{f\circledast g} = \hat{f}.\hat{g}$
Dérivation	$\widehat{(f')}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$		
Multiplication par t	$\widehat{(tf(t))}(\omega) = i\hat{f}'(\omega)$		
Signal réel	$\Leftrightarrow \left(\hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}\right)$		
Multiplication par $e^{i\alpha\cdot}$	$\widehat{f(t)e^{i\alpha t}}(\omega) = \hat{f}(\omega-\alpha)$	$\widehat{f(k)e^{i\alpha k}}(r) = \hat{f}(r-\alpha)$	$\widehat{f(k)e^{\frac{2\pi iak}{N}}}(n) = \hat{f}(n-a)$

2. On peut écrire des définitions similaires pour des signaux à plusieurs dimensions.
Par exemple, la transformée de Fourier d'un signal fini à deux dimensions $f[k,l]$ (avec $0\le k<N$ et $0\le l<M$) vaut :

$$\hat{f}[n,m] = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} f[k,l]e^{-2\pi i\left(\frac{nk}{N}+\frac{ml}{M}\right)} \qquad (\forall 0\le n<N, 0\le m<M)$$

Donner une formule d'inversion.

Exercice 2 : sous-échantillonage d'un signal discret

Soit $f[n]$ un signal discret. On définit $f_1[n] = f[2n]$.

1. On pose $f_2[n] = f[n]$ si n est pair et $f_2[n] = 0$ si n est impair. Calculer $\hat{f}_2$ en fonction de $\hat{f}$.

2. En déduire une condition suffisante sur f pour qu'on puisse reconstruire f à partir de f_1 (analogue au théorème de Nyquist). Donner une formule de reconstruction.

Exercice 3 : approximation d'un filtre analogique par un filtre discret

On considère un filtre analogique $g(t)$. On souhaite approximer ce filtre par un filtre discret.

1. On l'approxime d'abord par le filtre $h[n] = g(n)$.
a) Donner l'expression de la fonction de transfert $\hat{h}(r)$ du signal discret $h[n]$ en fonction de $\hat{g}$.
b) Donner une condition sur $\hat{g}$ pour que le filtre discret ait les mêmes caractéristiques fréquencielles que le filtre analogique.

2. On souhaite de plus que le filtre $h[n]$ soit à réponse impulsionnelle finie (c'est-à-dire que son support soit fini). On pose donc plutôt $h[n] = g(n)w(n)$, où w est une fonction « fenêtre » à support fini.

a) Calculer la fonction de transfert de h.
b) Comment choisir w ?

3. On suppose maintenant que le filtre analogique est de la forme $\hat{g}(\omega) = N(i\omega)/D(i\omega)$, où N et D sont des polynômes à coefficients réels tels que g est causal et stable.
a) Écrire l'équation différentielle régissant le circuit électronique implémentant ce filtre en fonction des coefficients des polynômes N et D.
b) On remplace, dans l'équation, chaque différentiation $f \to \frac{df}{dt}$ par la différence finie $D : f[n] \to f[n] - f[n-1]$. Calculer la fonction de transfert du filtre discret ainsi obtenu.
c) Ce filtre est-il stable et causal ?
d) Dans quelle mesure ses caractéristiques fréquencielles sont-elles proches des caractéristiques du filtre analogique ?

Exercice 4 : convolution rapide

Soient $L, M \in \mathbb{N}^*$ tels que $M < L$.
On considère deux signaux discrets f et h. On suppose que $f[k] = 0$ si $k \notin \{0, ..., L-1\}$ et $h[k] = 0$ si $k \notin \{0, ..., M-1\}$.
1. Montrer que $f \star h[n] = 0$ si $n \notin \{0, ..., L+M-2\}$.

On souhaite maintenant calculer le plus rapidement possible $f \star h[0], ..., f \star h[L+M-2]$.

2. Quelle est la complexité de l'implémentation directe ?

3. Quelle est la complexité de l'implémentation utilisant la transformée de Fourier ? (On rappelle que la transformée de Fourier d'un signal fini de taille N peut être calculée en $O(N\log(N))$ opérations.)

4. On suppose pour simplifier que L est un multiple de M. Décrire un algorithme calculant la convolution en $O(L\log(M))$ opérations.

Exercice 5 : transformée de Fourier rapide

Vous avez vu en cours un algorithme qui calcule la transformée de Fourier circulaire d'un signal de taille N en $O(N\log(N))$ opérations si N est une puissance de 2. Le but de l'exercice est de présenter un algorithme rapide, dû à Rader, adapté au cas où N est un nombre premier.
1. [Convolution rapide]
Soient g, h deux signaux de taille n. On souhaite calculer la convolution circulaire $g \star h$.
a) Soit $m \geq 2n-1$ une puissance de 2. On définit deux signaux de taille m, g' et h' :

$$g' = [g[0], 0, ..., 0, g[1], ..., g[n-1]] \qquad \text{et} \qquad \forall k = 0, ..., m-1, \quad h'[k] = h[k \bmod m]$$

Exprimer $g \star h$ en fonction de $g' \star h'$.
b) En déduire qu'on peut calculer $g \star h$ en $O(n\log(n))$ opérations.

2. Soit maintenant p un nombre premier et f un signal de taille p.
On rappelle que, pour tout entier k non-divisible par p, $k^{p-1} \equiv 1[p]$.
On admet le résultat suivant : il existe a compris entre 1 et $p-1$ tel que $\{1, 2, ..., p-1\} = \{1, a, a^2, ..., a^{p-2}\}$.
Ici, ce qu'on note a^s est en fait le reste de a^s dans la division par p.
a) Montrer que, pour tout k :

$$\hat{f}[a^{p-1-k}] = f[0] + (\tilde{f} \star g)[k]$$

où $\tilde{f} = [f[1], f[a], ..., f[a^{p-2}]]$ et $g[l] = e^{-\frac{2\pi i}{p}a^{p-1-l}}$ pour $l = 0, ..., p-2$.
b) En déduire qu'on peut calculer la transformée de Fourier d'un signal f de taille p en $O(p\log(p))$ opérations (en négligeant le temps de calcul de a).