École Normale Supérieure
12 mars 2015

Traitement du signal

Feuille d'exercices n^{o}4

Corrigé

Exercice 1

1. Formule d'inversion pour un signal discret : la fonction $\hat{f}$ est 2π-périodique. Puisque, par définition, $\hat{f}(r) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(-k)e^{ikr}$, les $(f(-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ sont les coefficients de f dans la décomposition en série de Fourier. On a donc :

$$f(-k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)e^{-ikr}dr$$

et, en remplaçant k par $-k$:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)e^{ikr}dr$$

Multiplication par t (ici k) pour un signal discret :

$$\begin{aligned}
\widehat{kf(k)}(r) &= \sum_k kf(k)e^{-ikr} = i\sum_k f(k)(-ik)e^{-ikr}\\
&= i\sum_k f(k)\left(e^{-ikr}\right)' = i\left(\sum_k f(k)e^{-ikr}\right)'\\
&= i f'(r)
\end{aligned}$$

(Il faut bien sûr supposer que $(f(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ décroît suffisamment rapidement lorsque $|k|\to+\infty$, de façon à ce que les sommes convergent.)

Condition pour que le signal soit réel pour un signal discret : si f est réel, on a pour tout r

$$\begin{aligned}
\hat{f}(r) &= \sum_k f(k)e^{-ikr} = \sum_k \overline{f(k)}e^{-ikr}\\
&= \overline{\sum_k f(k)e^{ikr}} = \overline{\hat{f}(-r)}
\end{aligned}$$

Si f est à images réelles, on doit donc avoir $\hat{f}(r) = \overline{\hat{f}(-r)}$. Réciproquement, si $\hat{f}(r) = \overline{\hat{f}(-r)}$, le signal f est réel car, pour tout k :

$$\begin{aligned}
\overline{f(k)} &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)e^{ikr}dr}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\hat{f}(r)}e^{-ikr}dr\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(-r)e^{-ikr}dr\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)e^{ikr}dr = f(k)
\end{aligned}$$

Condition pour que le signal soit réel pour un signal fini : si f est réel, on a pour tout $n \in \{1, ..., N-1\}$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \sum_k \overline{f(k)} e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \\
&= \overline{\sum_k f(k) e^{\frac{2\pi i n k}{N}}} \\
&= \overline{\sum_k f(k) e^{-\frac{2\pi i (N-n) k}{N}}} \\
&= \overline{\hat{f}(N-n)}
\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, on a $\hat{f}(0) = \overline{\hat{f}(0)}$.
Si le signal est réel, on a donc $\hat{f}(0) = \overline{\hat{f}(0)}$ (c'est-à-dire $f(0) \in \mathbb{R}$), $\hat{f}(1) = \overline{\hat{f}(N-1)}, \hat{f}(2) = \overline{\hat{f}(N-2)}, ...$
Cette condition suffit à ce que le signal soit réel. En effet, si elle est vérifiée, on a, pour tout k :

$$\begin{aligned}
\overline{f(k)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\hat{f}(n)} e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \hat{f}(0) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \hat{f}(N-n) e^{\frac{2\pi i (N-n) k}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n k}{N}} = f(k)
\end{aligned}$$

2. On définit d'abord un signal bidimensionnel $(g[k,m])_{0 \leq k < N, 0 \leq m < M}$ par :

$$g[k,m] = \sum_{l=0}^{M-1} f[k,l] e^{-2\pi i \frac{lm}{M}}$$

(c'est-à-dire que, pour tout k, $g[k,.]$ est la transformée de Fourier de $f[k,.]$)
Alors, pour tous n, m :

$$\hat{f}[n,m] = \sum_{k=0}^{N-1} g[k,m] e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}$$

(c'est-à-dire que, pour tout m, $\hat{f}[.,m]$ est la transformée de Fourier de $g[.,m]$)
D'après la formule d'inversion dans le cas à une dimension, on a, pour tout m et pour tout k :

$$g[k,m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}[n,m] e^{2\pi i \frac{kn}{N}}$$

Également d'après la formule d'inversion en dimension 1, on a, pour tous k, l :

$$f[k,l] = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} g[k,m] e^{2\pi i \frac{ml}{M}}$$

et donc en remplaçant g par sa valeur en fonction de $\hat{f}$:

$$f[k,l] = \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\hat{f}[n,m]e^{2\pi i\left(\frac{kn}{N}+\frac{ml}{M}\right)}$$

Exercice 2

1. Montrons que $\hat{f}_2(r) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(r) + \hat{f}(r+\pi)\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\hat{f}(r) + \hat{f}(r+\pi)\right) &= \frac{1}{2}\left(\sum_n f[n]e^{-inr} + \sum_n f[n]e^{-in(r+\pi)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_n f[n]e^{-inr}(1+(-1)^n) \\
&= \sum_{n \text{ pair}} f[n]e^{-inr} \\
&= \sum_n f_2[n]e^{-inr} = \hat{f}_2(r)
\end{aligned}$$

2. Si $\hat{f}$ vaut 0 sur $[-\pi;\pi] - \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, on a (puisque $\hat{f}$ est 2π-périodique) :

$$\hat{f}_2(r) = \frac{1}{2}\hat{f}(r) \text{ si } r \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

On a donc, pour tout r :

$$\hat{f}(r) = 2\hat{f}_2(r)1_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \bmod 2\pi}(r)$$

et donc $f = 2f_2 \star h$ où h est le signal discret tel que :

$$\hat{h}(r) = 1_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \bmod 2\pi}(r)$$

c'est-à-dire, d'après la question 1. de l'exercice 1 :

$$\begin{aligned}
h[k] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{h}(r)e^{ikr}dr \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ikr}}{ik}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{\pi k}\sin(k\pi/2)
\end{aligned}$$

(sauf pour $k = 0$ où on a $h[0] = \frac{1}{2}$)
De manière plus concise, $2h[k] = \text{sinc}(k\pi/2)$.
On a donc, pour tout n :

$$f[n] = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_2[k]h[n-k] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f[2k]\text{sinc}((n-2k)\pi/2)$$

Exercice 3

1. a) $\hat{h}(r) = \sum_n g(n)e^{-inr} = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_n g(n)\delta_n(x)\right) e^{-irx}dx$

La transformée de Fourier discrète $\hat{h}$ est donc égale à la transformée de Fourier continue de $\left(\sum_n g(n)\delta_n(x)\right)$. D'après le cours, elle vaut donc :

$$\hat{h}(r) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(r - 2k\pi)$$

b) Il faut que le support de $\hat{g}$ soit inclus dans $[-\pi;\pi]$. Ainsi, les fonctions de transfert des filtres discrets et continus coïncident sur $[-\pi;\pi]$.

2. a) De même qu'à la question 1.a), $\hat{h}$ est la transformée de Fourier continue de la fonction $\sum_n g(n)w(n)\delta_n = g.\left(\sum_n w(n)\delta_n\right)$.

On a donc $\hat{h} = \frac{1}{2\pi}\hat{g} \star \widehat{\left(\sum_n w(n)\delta_n\right)}$. De plus, la transformée de Fourier continue $\widehat{\left(\sum_n w(n)\delta_n\right)}$ est exactement égale à la transformée de Fourier discrète $\hat{w}$.

On a donc $\hat{h} = \frac{1}{2\pi}\hat{g} \star \hat{w}$.

b) Lorsque w est identiquement égale à 1 (et n'est donc pas à support fini), $\frac{1}{2\pi}\hat{w}$ est le peigne de diracs $\sum_k \delta_{2\pi k}$. On retrouve bien le résultat de la question 1.a) : $\hat{h}$ est la version 2π-périodisée de $\hat{g}$.

On voudrait choisir w à support fini de sorte que $\hat{w}$ est la plus proche possible d'un peigne de diracs parfait.

Le plus simple est de choisir pour w la version discrétisée d'un signal W continu à support compact (c'est-à-dire $w[n] = W(n)$, avec $W(t)$ une fonction à support compact). Avec ce choix, $\hat{w}$ est la 2π-périodisée de $\hat{W}$. Pour que $\hat{w}$ soit « proche » d'un peigne de diracs, il suffit donc que $\hat{W}$ soit « proche » d'un dirac en 0.

Choisir une fonction W bien lisse (c'est-à-dire infiniment dérivable) est un choix sûr car cela garantit que $\hat{W}$ décroît rapidement.

3. a) On écrit $N(X) = a_0 + a_1X + ... + a_cX^c$ et $D(X) = b_0 + b_1X + ... + b_dX^d$.

L'équation différentielle est $b_0f_s + b_1\frac{df_s}{dt} + ... + b_d\frac{d^df_s}{dt^d} = a_0f_e + a_1\frac{df_e}{dt} + ... + a_c\frac{d^cf_e}{dt^c}$, où f_e est le signal d'entrée et f_s le signal de sortie.

b) L'équation devient :

$$b_0f_s + b_1Df_s + ... + b_dD^df_s = a_0f_e + a_1Df_e + ... + a_cD^cf_e \tag{1}$$

Pour une fonction f donnée, calculons $\widehat{Df}$ en fonction de $\hat{f}$:

$$\begin{aligned} Df(r) &= \sum_n (f[n] - f[n-1])e^{-inr} \\ &= \sum_n f[n]e^{-inr} - e^{-ir}\sum_n f[n-1]e^{-i(n-1)r} \\ &= (1 - e^{-ir})\hat{f}(r) \end{aligned}$$

D'après l'équation 1, on a donc :

$$\hat{f}_s(b_0 + (1-e^{-ir})b_1 + ... + (1-e^{-ir})^d b_d) = \hat{f}_e(a_0 + (1-e^{-ir})a_1 + ... + (1-e^{-ir})^c a_c)$$

La fonction de transfert est donc $H(r) = \frac{a_0+(1-e^{-ir})a_1+...+(1-e^{-ir})^c a_c}{b_0+(1-e^{-ir})b_1+...+(1-e^{-ir})^d b_d} = \frac{N(1-e^{-ir})}{D(1-e^{-ir})}$.
c) Le cours dit qu'un filtre discret correspondant à une fonction de transfert de la forme $P(e^{-ir})/Q(e^{-ir})$ est stable et causal si et seulement si tous les pôles z_0 de $z \to P(z^{-1})/Q(z^{-1})$ vérifient $|z_0| < 1$. Cherchons donc si cette propriété est vérifiée ici.
Un complexe z_0 est un pôle de $N(1-z^{-1})/D(1-z^{-1})$ si et seulement si $1-z_0^{-1}$ est un pôle de N/D. Puisque N/D correspond à un filtre stable et causal, cette fraction rationnelle n'a que des pôles de partie réelle strictement négative (voir le TD 1/2) donc, si z_0 est un pôle de $N(1-z^{-1})/D(1-z^{-1})$, on doit avoir $\Re(1-z_0^{-1}) < 0$.
Donc $z_0 = \frac{1}{1-(1-z_0^{-1})}$. Comme $|1-(1-z_0^{-1})| \geq \Re(1-(1-z_0^{-1})) = 1 - \Re(1-z_0^{-1}) > 1$, $|z_0| < 1$.
Donc la propriété voulue est vérifiée.
Le filtre est stable et causal.
d) On a $\frac{N(1-e^{-ir})}{D(1-e^{-ir})} \approx \frac{N(ir)}{D(ir)}$ lorsque $|r| << 1$. Les deux fonctions de transfert sont donc similaires au voisinage de 0 (mais pas nécessairement ailleurs).

Exercice 4

1. $f \star h[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]f[n-k] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]f[n-k]$.
Pour que cette somme soit non-nulle, il faut qu'il existe $k \in \{0, ..., M-1\}$ tel que $f[n-k] \neq 0$.
Il doit donc exister $k \in \{0, ..., M-1\}$ tel que $n-k = l$, avec $l \in \{0, ..., L-1\}$.
Alors $n = k + l$ et puisque k est compris entre 0 et $M-1$ et l entre 0 et $L-1$, on a $0 \leq n \leq M+L-2$.

2. Il faut calculer chacun des $h[k]f[l]$ pour $0 \leq k < M$ et $0 \leq l < L$. Ensuite, chaque $f \star h[n]$ s'écrit comme une somme de ces éléments, chaque $h[k]f[l]$ n'étant utilisé qu'une seule fois (pour $n = l + k$). Il y a donc ML produits et à peu près ML additions à effectuer. La complexité est $O(ML)$.

3. Le cours explique pourquoi, avec la transformée de Fourier rapide, la convolution de deux signaux discrets dont le support est inclus dans $\{0, ..., L-1\}$ peut se calculer en temps $O(L\log(L))$.
Puisque h et f ont tous deux leurs supports inclus dans $\{0, ..., L-1\}$, cet algorithme est applicable ici et donne un nombre d'opérations en $O(L\log(L))$.

4. Pour tout $s = 0, ..., L/M-1$, on définit le signal f_s par :

$$\begin{aligned} f_s[k] &= f[k] \text{ si } sM \leq k < (s+1)M \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Pour tout s, le support de f_s est de taille M donc, d'après la question précédente, on peut calculer $f_s \star h$ en temps $O(M\log(M))$.
De plus, de même qu'à la question 1., le support de $f_s \star h$ est inclus dans $\{sM, sM+1, ..., (s+2)M-2\}$.

Pour tout n, $f \star h[n] = f_0 \star h[n] + f_1 \star h[n] + ... + f_{L/M-1} \star h[n]$ mais, vu les supports de ces fonctions, seuls deux termes de la somme au plus sont non-nuls (pour n fixé). Pour tout n, on peut donc calculer $f \star h[n]$ en une seule addition à partir des $f_s \star h[n]$.
Le temps de calcul est donc la somme des temps de calcul des $f_s \star h$ et des $M + L - 1$ additions finales. Ce temps est donc $\frac{L}{M} O(M \log(M)) + M + L - 1 = O(L \log(M))$.

Exercice 5

1. a) Pour tout $s = 0, ..., n-1$:

$$\begin{aligned}
g \star h[s] &= \sum_{k=0}^{n-1} g[k] h[(s-k) \bmod n] \\
&= g'[0]h'[s] + \sum_{k=1}^{n-1} g'[k+m-n] h[(s-k) \bmod n] \\
&= g'[0]h'[s] + \sum_{k=1}^{n-1} g'[k+m-n] h'[n+s-k] \\
&= g'[0]h'[s] + \sum_{k=m-n+1}^{m-1} g'[k] h'[m+s-k] \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} g'[k] h'[(m+s-k) \bmod m] \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} g'[k] h'[(s-k) \bmod m] \\
&= g' \star h'[s]
\end{aligned}$$

b) Définissons m comme la plus petite puissance de 2 supérieure ou égale à $2n-1$. Alors $2n - 1 \leq m < 2(2n-1)$; en particulier, $m \leq 4n$.
Calculer g' et h' en fonction de g et h se fait en $O(m) = O(n)$ opérations. Puisque g' et h' ont pour longueur une puissance de 2, leur convolution se calcule (au moyen de la transformée de Fourier rapide) en $O(m \log(m)) = O(n \log(n))$ opérations.
Comme on a vu que $g \star h$ était égale aux n premiers coefficients de $g' \star h'$, $g \star h$ se calcule en $O(n \log(n))$ opérations.

2. a)

$$\begin{aligned}
f[0] + (\tilde{f} \star g)[k] &= f[0] + \sum_{s=0}^{p-2} \tilde{f}[s] g[k-s] \\
&= f[0] + \sum_{s=0}^{p-2} f[a^s] e^{-\frac{2\pi i}{p} a^{p-1-k+s}} \\
&= f[0] + \sum_{s=0}^{p-2} f[a^s] e^{-\frac{2\pi i}{p} a^{p-1-k} a^s} \\
&= f[0] + \sum_{r=1}^{p-1} f[r] e^{-\frac{2\pi i}{p} a^{p-1-k} r} \\
&= \sum_{r=0}^{p-1} f[r] e^{-\frac{2\pi i}{p} a^{p-1-k} r} = \hat{f}[a^{p-1-k}]
\end{aligned}$$

b) Les signaux $\tilde{f}$ et g se calculent en $O(p)$ opérations, si a est connu. D'après la question 1., $\tilde{f} \star g$ se calcule en $O(p\log(p))$ opérations donc $(\hat{f}[a^{p-1-k}])_{0\leq k\leq p-1}$ se calcule en $O(p\log(p))$ opérations. Puisque $\hat{f}$ se déduit de ce signal en $O(p)$ opérations, $\hat{f}$ se calcule également en $O(p\log(p))$ opérations.