École Normale Supérieure
19 mars 2015

Traitement du signal

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$5

Soit g une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et à valeurs réelles telle que $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = 1$.
On définit la transformée de Fourier à fenêtre d'une fonction f par :

$$Sf(u,\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t}dt$$

Exercice 1 : localisation en temps et en fréquence

1. a) Calculer Sf lorsque $f = \delta_{t_0} + \delta_{t_1}$.
b) Dessiner l'allure de $|Sf|$ lorsque le support de g est de taille inférieure à $|t_0 - t_1|$.
c) Dessiner l'allure de $|Sf|$ lorsque le support de g est de taille supérieure à $|t_0 - t_1|$.

2. a) Calculer Sf lorsque $f(t) = e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_1 t}$.
b) Comment doit être $\hat{g}$ pour que Sf présente deux bandes horizontales ?

Exercice 2 : discrétisation de la transformée de Fourier à fenêtre

Soit Δu un réel strictement positif fixé.
On considère l'application $S_d : f \in L^2(\mathbb{R}) \to S_d f(n,\xi) = Sf(n\Delta u, \xi)$.
1. Si K est une fonction définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, on définit sa norme par :

$$||K||_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |K(n,t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

(1) Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$, $A||f||_2 \leq ||S_d f||_2 \leq B||f||_2$.

(2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A^2 \leq 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(t - n\Delta u)|^2 \leq B^2$.

2. En supposant la propriété de la question précédente vérifiée, donner une formule pour reconstruire f à partir de $S_d f$.

3. On suppose maintenant qu'un autre réel positif $\Delta\xi$ strictement positif est fixé.
Pour tous n, m, on pose :

$$g_{n\Delta u, m\Delta\xi}(t) = g(t - n\Delta u)e^{im\Delta\xi t}$$

et on se demande comment reconstruire f à partir de $\{Sf(n\Delta u, m\Delta\xi)\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$.
On propose la formule de reconstruction suivante :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} Sf(n\Delta u, m\Delta\xi) g_{n\Delta u, m\Delta\xi}(t)$$

a) Montrer que, si $(g_{n\Delta u, m\Delta\xi})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ est une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$, alors $\tilde{f} = f$.

b) Donner des exemples simples de g, Δu et $\Delta\xi$ tels que $(g_{n\Delta u, m\Delta\xi})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ est une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$. Quels problèmes ces exemples risquent-ils de poser pour le calcul de la transformée de Fourier à fenêtre ?

Exercice 3 : transformée de Wigner-Ville

La transformée de Wigner-Ville d'une fonction f est définie par :

$$P_V f(u,\xi) = \int_{\mathbb{R}} f\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\overline{f\left(u-\frac{\tau}{2}\right)}e^{-i\tau\xi}d\tau$$

1. Montrer que :

$$P_V f(u,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}\left(\xi+\frac{\gamma}{2}\right)\overline{\hat{f}\left(\xi-\frac{\gamma}{2}\right)}e^{i\gamma u}d\gamma$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
a) Montrer que si $f(x) = 0$ pour tout $x \notin [a;b]$, alors $P_V f(u,\xi) = 0$ pour tout $u \notin [a;b]$.
b) Montrer que si $\hat{f}(\omega) = 0$ pour tout $\omega \notin [a;b]$, alors $P_V f(u,\xi) = 0$ pour tout $\xi \notin [a;b]$.

3. Montrer les égalités suivantes :

$$\forall\xi, \quad \int_{\mathbb{R}} P_V f(u,\xi)du = |\hat{f}(\xi)|^2 \qquad \forall u, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} P_V f(u,\xi)d\xi = |f(u)|^2$$

4. Soit g une fonction « fenêtre » centrée en 0, de support $[-1;1]$, assez concentrée en basses fréquences.
Soient $\omega_1, \omega_2, u_1, u_2$ des réels tels que $|u_1 - u_2| \gg 2$.
a) On suppose que $f(t) = g(t-u_1)e^{i\omega_1 t} + g(t-u_2)e^{i\omega_2 t}$. Montrer que $P_V f$ est la somme de trois composantes localisées en temps et en fréquence.
b) Quel problème la transformée de Wigner-Ville pose-t-elle dans le cadre de l'étude temps-fréquence de signaux ?

5. [Plus difficile] Dans cette question, on montre qu'il n'existe pas de fonction quadratique $P_V : \mathcal{S} \to L^1(\mathbb{R}^2)$ telle que P_V vérifie les deux égalités de la question 3. et $P_V(f) \geq 0$ pour toute fonction f.
Ici, $\mathcal{S}$ désigne la classe de Schwarz. On dit que P_V est quadratique s'il existe $Q_V : \mathcal{S}^2 \to L^1(\mathbb{R}^2)$ qui soit linéaire en la deuxième variable, anti-linéaire en la première et qui vérifie :

$$\forall f \in \mathcal{S}, P_V(f) = Q_V(f,f) \qquad \text{et} \qquad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{S}, Q_V(f_1,f_2) = \overline{Q_V(f_2,f_1)}$$

Supposons par l'absurde qu'une telle fonction P_V existe. Notons Q_V la forme bilinéaire associée.
a) Montrer que, si f est à support dans un compact $U \subset \mathbb{R}$, alors $P_V f(u,\xi) = 0, \forall u \notin U$.
b) Montrer que si f_1 et f_2 sont à support dans des compacts disjoints U_1, U_2, alors $Q_V(f_1,f_2) = 0$.
[Indication : Considérer $P_V(af_1 + bf_2)$ pour $a, b \in \mathbb{C}$.]
c) En déduire que, si f_1 et f_2 sont comme à la question précédente, alors $|\widehat{(f_1+f_2)}(\xi)|^2 = |\hat{f_1}(\xi)|^2 + |\hat{f_2}(\xi)|^2$ pour tout ξ.
d) Conclure.

Exercice 4 : fréquence instantanée

1. a) On suppose que $f(t) = \exp(i\omega_0 t)$. Exprimer $Sf(u, \xi)$ en fonction de $\hat{g}$.
b) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi |Sf(u, \xi)|^2 d\xi = \omega_0$.

2. a) On suppose que $f = \exp(i\phi(t))$. Montrer que, pour tout u, $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |Sf(u, \xi)|^2 d\xi = 1$.
b) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi |Sf(u, \xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) |g(t-u)|^2 dt$.
c) Comment interpréter ce résultat ?

3. Que se passe-t-il si on prend la partie réelle de ce signal ?

Exercice 5 : noyau reproduisant

1. Donner l'expression d'une fonction $K(u, u', \xi, \xi')$ dépendant de g et telle que :

$$Sf(u, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int \int Sf(u', \xi') K(u, u', \xi, \xi') du' d\xi'$$

2. Soit V l'espace des fonctions $F(u, \xi)$ telles qu'il existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant $F(u, \xi) = Sf(u, \xi)$.
a) Montrer que $V \subset L^2(\mathbb{R}^2)$.
b) Soit P l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$PF(u, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int \int F(u', \xi') K(u, u', \xi, \xi') du' d\xi'$$

Montrer que P est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R}^2)$ sur V (pour le K que vous avez trouvé).