Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$5

Corrigé

Exercice 1

1. a) Si $f = \delta_{t_0}$, on a $Sf(u, \xi) = g(t_0 - u)e^{-i\xi t_0}$.
Pour $f = \delta_{t_0} + \delta_{t_1}$, on a donc $Sf(u, \xi) = g(t_0 - u)e^{-i\xi t_0} + g(t_1 - u)e^{-i\xi t_1}$.
b) Si $|t_0 - t_1|$ est plus grand que la taille du support de g, on a, pour tout u, $g(t_0 - u) = 0$ ou $g(t_1 - u) = 0$. Donc $|Sf(u, \xi)| = |g(t_0 - u)|$ si $t_0 - u$ appartient au support de g, $|Sf(u, \xi)| = |g(t_1 - u)|$ si $t_1 - u$ appartient au support de g et $|Sf(u, \xi)| = 0$ sinon.
Le graphe de $|Sf|$ présente donc deux bandes verticales, centrées respectivement aux abscisses t_0 et t_1. Un exemple se trouve sur la figure 1.
c) En élevant au carré l'expression trouvée pour Sf et en utilisant le fait que g est une fonction réelle, on obtient :

$$|Sf(u, \xi)|^2 = |g(t_0 - u)|^2 + 2g(t_0 - u)g(t_1 - u)\cos(\xi(t_0 - t_1)) + |g(t_1 - u)|^2$$

Sur la ligne verticale d'abscisse t, $|Sf(t, \xi)|$ oscille donc entre $|g(t_0 - t)| + |g(t_1 - t)|$ et $||g(t_0 - t)| - |g(t_1 - t)||$.
Le graphe présente une seule ligne verticale, avec des oscillations au milieu. Un exemple se trouve sur la figure 2, pour $t_1 = 282$ et $t_2 = 318$.
2. a) Pour $f(t) = e^{i\omega_0 t}$, on a :

$$Sf(u, \xi) = \int_{\mathbb{R}} g(t - u)e^{-i(\xi - \omega_0)t} = \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-i(\xi - \omega_0)t}e^{-iu(\xi - \omega_0)}dt = \hat{g}(\xi - \omega_0)e^{-iu(\xi - \omega_0)}$$

Lorsque $f(t) = e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_1 t}$, on a donc :

$$Sf(u, \xi) = \hat{g}(\xi - \omega_0)e^{-iu(\xi - \omega_0)} + g(\xi - \omega_1)e^{-iu(\xi - \omega_1)}$$

Pour que le graphe de $|Sf|$ présente deux bandes d'ordonnées $\xi = \omega_0$ et $\xi = \omega_1$, il faut que $\hat{g}(\xi - \omega_0)$ et $\hat{g}(\xi - \omega_1)$ soient à peu près à support disjoint. Il faut donc que $\hat{g}$ soit concentrée dans un intervalle de largeur inférieure à $|\omega_0 - \omega_1|$.

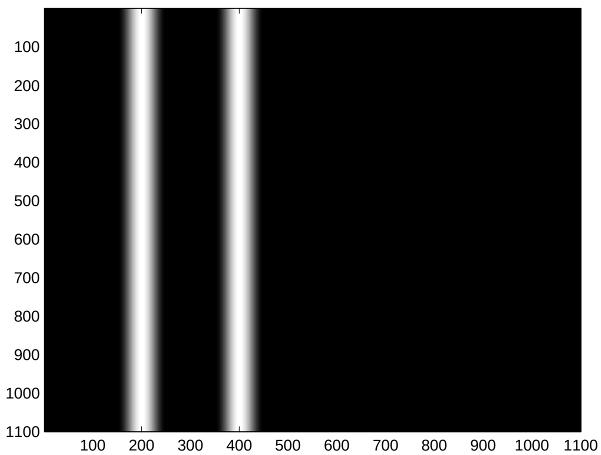

FIGURE 1 –

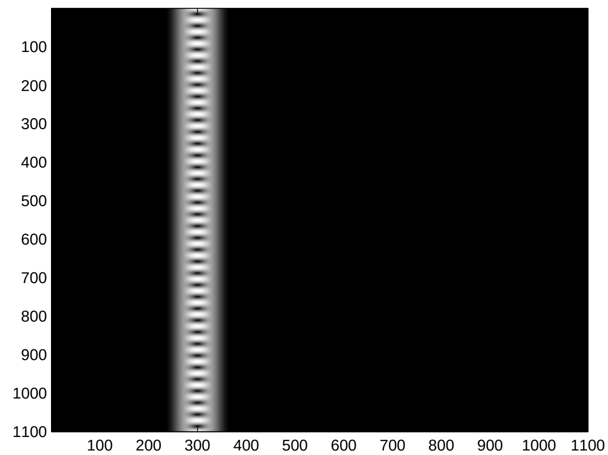

FIGURE 2 –

Exercice 2

1. On utilise le fait que, pour toute fonction h, $||\hat{h}||_2 = \sqrt{2\pi}||h||_2$.

$$\begin{aligned}
||S_d f||_2^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |Sf(n\Delta u,\xi)|^2 d\xi \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{fg(.-n\Delta u)}|^2(\xi) d\xi \\
&= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |fg(.-n\Delta u)|^2(t) dt \\
&= 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(t-n\Delta u)|^2 dt
\end{aligned}$$

Posons $H(t) = 2\pi \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |g(t-n\Delta u)|^2$. On vient de démontrer :

$$||S_d f||_2^2 = \int_R |f(t)|^2 H(t) dt$$

Donc, si $A^2 \leq H(t) \leq B^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$A^2||f||_2^2 = A^2 \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \leq ||S_d f||_2^2 \leq B^2 \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = B^2||f||_2^2$$

Donc $A||f||_2 \leq ||S_d f||_2 \leq B||f||_2$.
Réciproquement, supposons par exemple qu'on n'a pas $H(t) \geq A^2$ pour tout t et montrons qu'il existe f telle que $A||f||_2 \not\leq ||S_d f||_2$. On pourra effectuer un raisonnement similaire pour traiter le cas où on n'a pas $H(t) \leq B^2$ pour tout t.
Soit t_0 tel que $H(t_0) < A^2$. Par continuité, il existe $\epsilon > 0$ et $A' < A$ tels que $H(t) < A'^2$ pour tout $t \in [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$. Soit f une fonction non-nulle à support inclus dans $[t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$.
Alors :

$$||S_d f||_2^2 = \int_R |f(t)|^2 H(t) dt = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} |f(t)|^2 H(t) dt \leq A'^2 \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = A'^2||f||_2^2$$

donc $||S_d f||_2 \leq A'||f||_2 < A||f||_2$.
2. Pour tout n, $S_d f(n,.)$ est la transformée de Fourier de $fg(.-n\Delta u)$. À partir de $S_d f(n,.)$, on peut donc reconstruire $fg(.-n\Delta u)$ par la formule d'inversion de Fourier :

$$f(t)g(t-n\Delta u) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_d f(n,\xi)e^{it\xi}d\xi$$

Il suffit ensuite de reconstruire f à partir des $fg(.-n\Delta u)$. Il y a plusieurs formules de reconstruction possibles, en particulier :

$$f(t) = \frac{\sum\limits_n (f(t)g(t-n\Delta u)) \times g(t-n\Delta u)}{\sum\limits_n |g(t-n\Delta u)|^2}$$

d'où, en notant $h(t) = \frac{g(t)}{\sum\limits_n |g(t-n\Delta u)|^2}$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_n S_d f(n,\xi)h(t-n\Delta u)\right) e^{it\xi}d\xi$$

3. a) Puisque $Sf(n\Delta u, m\Delta\xi) = \langle f, g_{n\Delta u, m\Delta\xi}\rangle$, la formule de reconstruction proposée est :

$$\tilde{f} = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle f, g_{n\Delta u,m\Delta\xi}\rangle g_{n\Delta u,m\Delta\xi}$$

Si $(g_{n\Delta u,m\Delta\xi})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$, on a bien $f = \tilde{f}$.
b) On peut prendre $g = 1_{[0;1]}$, $\Delta u = 1$ et $\Delta\xi = 2\pi$.
Alors $\langle g_{n\Delta u,m\Delta\xi}, g_{n'\Delta u,m'\Delta\xi}\rangle = 0$ si $n \neq n'$ car alors $g(.-n\Delta u)$ et $g(.-n'\Delta u)$ sont à supports disjoints. Si $n = n'$ mais $m \neq m'$, le produit scalaire vaut :

$$\int_0^1 e^{i(m'-m)2\pi t}dt$$

ce qui vaut 0 si $m \neq m'$ et 1 si $m = m'$.
La formule de reconstruction est donc bien valable. En revanche, une fenêtre en créneau risque de ne pas être un très bon choix pour calculer la transformée de Fourier à fenêtre car, si elle est bien localisée en temps, elle est mal localisée en fréquence : sa transformée de Fourier est un sinus cardinal.
De manière similaire, $\hat{g} = 1_{[0;2\pi]}$ convient, avec $\Delta u = 1$ et $\Delta\xi = 2\pi$. Dans ce cas, on a une bonne localisation fréquentielle mais une mauvaise localisation temporelle.

Exercice 3

1. La transformée de Fourier de $\tau \to f(u+\tau/2)$ est $\omega \to 2\hat{f}(2\omega)e^{2iu\omega}$. La transformée de Fourier de $\tau \to f(u-\tau/2)e^{i\tau\xi}$ est $\omega \to 2e^{2iu(\xi-\omega)}\hat{f}(2(\xi-\omega))$ (cela se vérifie par le calcul).

En utilisant l'égalité $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{h}_1\overline{\hat{h}_2} = \int_{\mathbb{R}} h_1\overline{h}_2$ (qui provient du fait que la transformée de Fourier, multipliée par $1/\sqrt{2\pi}$, est un opérateur unitaire), on obtient :

$$\begin{aligned}
P_V f(u,\xi) &= \frac{4}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(2\omega)e^{2iu\omega}e^{-2iu(\xi-\omega)}\overline{\hat{f}(2(\xi-\omega))}d\omega \\
&= \frac{4}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(2\omega)\overline{\hat{f}(2(\xi-\omega))}e^{-2iu(\xi-2\omega)}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi+\gamma/2)\overline{\hat{f}(\xi-\gamma/2))}e^{iu\gamma}d\gamma
\end{aligned}$$

La dernière égalité a été obtenue par un changement de variable $\gamma = 2(2\omega-\xi)$.

2. a) Si $P_V f(u,\xi)\neq 0$, alors il existe $\tau\in\mathbb{R}$ tel que $f(u+\tau/2)\overline{f(u-\tau/2)}\neq 0$. Posons $y_1 = u+\tau/2$ et $y_2 = u-\tau/2$. Puisque $f(y_1)$ et $f(y_2)$ sont non-nuls, $y_1, y_2\in[a;b]$.
Comme $u = \frac{y_1+y_2}{2}$, u appartient aussi à $[a;b]$.
b) C'est le même raisonnement que précédemment, appliqué à l'expression obtenue dans la question 1.

3. La fonction $\xi\to P_V f(u,\xi)$ est la transformée de Fourier de la fonction $\tau\to f(u+\tau/2)\overline{f(u-\tau/2)}$. D'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier :

$$|f(u)|^2 = f(u+0/2)\overline{f(u-0/2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} P_V f(u,\xi)d\xi$$

D'après la question 1., la fonction $u\to P_V f(u,\xi)$ est la transformée de Fourier inverse de la fonction $\gamma\to\hat{f}(\xi+\gamma/2)\overline{\hat{f}(\xi-\gamma/2)}$. Donc $\int_{\mathbb{R}} P_V f(u,\xi)du$ est la valeur de $\gamma\to\hat{f}(\xi+\gamma/2)\overline{\hat{f}(\xi-\gamma/2)}$ en $\gamma = 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} P_V f(u,\xi)du = |\hat{f}(\xi)|^2$$

4. a) Posons $f_1(t) = g(t-u_1)e^{i\omega_1 t}$ et $f_2(t) = g(t-u_2)e^{i\omega_2 t}$. Alors $P_V f$ est la somme de quatre termes : $P_V f_1, P_V f_2$ et

$$\int_{\mathbb{R}} f_1\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\overline{f_2\left(u-\frac{\tau}{2}\right)}e^{-i\tau\xi}d\tau \qquad \int_{\mathbb{R}} f_2\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\overline{f_1\left(u-\frac{\tau}{2}\right)}e^{-i\tau\xi}d\tau$$

En faisant un changement de variable $\tau\leftrightarrow-\tau$, on voit que ces deux termes sont conjugués. Leur somme est donc deux fois la partie réelle du premier. Étudions donc seulement le premier :

$$\int_{\mathbb{R}} f_1\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\overline{f_2\left(u-\frac{\tau}{2}\right)}e^{-i\tau\xi}d\tau = \int_{\mathbb{R}} g\left(u-u_1+\frac{\tau}{2}\right)\overline{g\left(u-u_2-\frac{\tau}{2}\right)}e^{i\left((\omega_1-\omega_2)u+\frac{(\omega_1+\omega_2)\tau}{2}\right)}e^{-i\tau\xi}d\tau$$

Pour que ce terme prenne des valeurs non-négligeables, il faut que $u\in\left[\frac{u_1+u_2}{2}-1;\frac{u_1+u_2}{2}+1\right]$. En effet, sinon, on a $g(u-u_1+\tau/2)\overline{g(u-u_2-\tau/2)} = 0$ pour tout τ.
Puisque g est assez concentrée en basses fréquences, le produit $\tau\to g(u-u_1+\tau/2)\overline{g(u-u_2-\tau/2)}$ l'est aussi. À multiplication par $e^{i(\omega_1-\omega_2)u}$ près, le terme qu'on considère est la transformée de Fourier de cette fonction en $\xi-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$. Il faut donc avoir $\xi\approx\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ pour que ce terme ne soit pas négligeable.

Pour $u = \frac{u_1+u_2}{2}$ et $\xi = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, cette fonction vaut :

$$2e^{i(\omega_1-\omega_2)u} \int_{\mathbb{R}} g(\tau)\overline{g(-\tau)}d\tau$$

ce qui n'est pas a priori négligeable devant Pf_1 et Pf_2.
Par un raisonnement similaire, Pf_1 et Pf_2 sont concentrées en fréquences autour de (u_1, ω_1) et (u_2, ω_2).
Donc Pf est une somme de trois termes, localisés en temps-fréquence autour de (u_1, ω_1), (u_2, ω_2) et $\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$.
b) Le terme d'interférence (la composante localisée en $\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$) est indésirable. En effet, le signal f est nul autour du temps $\frac{u_1+u_2}{2}$ et sa transformée de Fourier est a priori négligeable autour de $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ (si ω_1 et ω_2 sont assez différentes). Ces valeurs n'ont donc pas d'interprétation physique simple.
5. a) Pour tout $u \notin U$, $0 = |f(u)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} P_V f(u, \xi) d\xi$. Puisque $P_V f(u, \xi) \geq 0$ pour tout ξ, on doit avoir $P_V f(u, \xi) = 0$ pour tout ξ.
b)

$$\begin{aligned}
P_V(af_1 + bf_2) &= Q_V(af_1 + bf_2, af_1 + bf_2) \\
&= |a|^2 Q_V(f_1, f_1) + \overline{a}bQ_V(f_1, f_2) + a\overline{b}Q_V(f_2, f_1) + |b|^2 Q_v(f_2, f_2) \\
&= |a|^2 P_V(f_1) + 2\Re\left(\overline{a}bQ_V(f_1, f_2)\right) + |b|^2 P_V(f_2)
\end{aligned}$$

Pour tout $u \notin U_1 \cup U_2$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $P_V(af_1 + bf_2)(u, \xi) = P_V(f_1)(u, \xi) = P_V(f_2)(u, \xi) = 0$ d'après la première question. On a donc, pour tous a, b, $\Re\left(\overline{a}bQ_V(f_1, f_2)(u, \xi)\right) = 0$. Puisque c'est vrai pour tous a, b, on doit avoir $Q_V(f_1, f_2)(u, \xi) = 0$.
Pour tout $u \in U_2$, on a, pour tout ξ :

$$0 \leq P_V(af_1 + bf_2)(u, \xi) = 2\Re\left(\overline{a}bQ_V(f_1, f_2)(u, \xi)\right) + |b|^2 P_V(f_2)(u, \xi)$$

Si on prend b réel et qu'on le fait tendre vers 0, on obtient :

$$0 \leq 2b\Re\left(\overline{a}Q_V(f_1, f_2)(u, \xi)\right) + o(b)$$

On doit donc avoir $\Re\left(\overline{a}Q_V(f_1, f_2)(u, \xi)\right) = 0$ pour tout a et donc $Q_V(f_1, f_2)(u, \xi) = 0$.
De manière symétrique, $Q_V(f_1, f_2)(u, \xi) = 0$ pour tout ξ et tout $u \in U_1$. Donc $Q_V(f_1, f_2) = 0$.
c) D'après la question précédente, $P_V(f_1 + f_2) = P_V(f_1) + P_V(f_2) + 2\Re(Q_V(f_1, f_2)) = P_V(f_1) + P_V(f_2)$.
Donc, pour tout ξ :

$$\begin{aligned}
|\widehat{(f_1 + f_2)}(\xi)|^2 &= \int_{\mathbb{R}} P_V(f_1 + f_2)(u, \xi) du \\
&= \int_{\mathbb{R}} P_V(f_1)(u, \xi) du + \int_{\mathbb{R}} P_V(f_2)(u, \xi) du \\
&= |\hat{f}_1|^2(\xi) + |\hat{f}_2|^2(\xi)
\end{aligned}$$

d) Puisque $|\widehat{(f_1+f_2)}(\xi)|^2 = |\hat{f}_1|^2(\xi) + |\hat{f}_2|^2(\xi) + 2\Re(\hat{f}_1(\xi)\overline{\hat{f}_2(\xi)})$, cela veut dire que, pour tout ξ, $\Re(\hat{f}_1(\xi)\overline{\hat{f}_2(\xi)}) = 0$.
Il n'est pas possible que toutes les fonctions de la classe de Schwarz à supports disjoints, f_1 et f_2, vérifient $\Re(\hat{f}_1(\xi)\overline{\hat{f}_2(\xi)}) = 0$. En effet, si c'était vrai, ce serait aussi le cas pour toutes les fonctions de L^1 à support disjoint (car l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^1) et il suffit de prendre $f_1 = 1_{[0;1]}$ et $f_2 = 1_{[2;3]}$ pour se convaincre que ce n'est pas vrai.

Exercice 4

1. a) $Sf(u,\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(t-u)e^{-i(\xi-\omega_0)t}dt = e^{-iu(\xi-\omega_0)}\int_{\mathbb{R}} g(t')e^{-i(\xi-\omega_0)t'}dt' = e^{-iu(\xi-\omega_0)}\hat{g}(\xi-\omega_0)$
b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi|Sf(u,\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi|\hat{g}(\xi-\omega_0)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (\xi-\omega_0)|\hat{g}(\xi-\omega_0)|^2 d\xi + \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi|\hat{g}(\xi)|^2 d\xi + \omega_0 \\
&= \omega_0
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = 1$ et le fait que $\xi|\hat{g}(\xi)|^2$ est une fonction impaire (à cause du fait que g est réelle et que $\hat{g}(-\xi) = \overline{\hat{g}(\xi)}$) et que donc son intégrale est nulle.
2. a) $Sf(u,.)$ est la transformée de Fourier de la fonction $f(.)g(.-u)$. On a donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |Sf(u,\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t-u)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |g(t-u)|^2 dt = 1$$

b) On utilise l'égalité $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{h}_1\overline{\hat{h}_2} = \int_{\mathbb{R}} h_1\overline{h}_2$ et le fait que, puisque $\xi \to Sf(u,\xi)$ est la transformée de Fourier de $f(.)g(.-u)$, $(i\xi)Sf(u,\xi)$ est la transformée de Fourier de $(f(.)g(.-u))' = f'(.)g(.-u) + f(.)g'(.-u)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi|Sf(u,\xi)|^2 d\xi &= \frac{-i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\xi Sf(u,\xi)\overline{Sf(u,\xi)}d\xi \\
&= (-i)\int_{\mathbb{R}} (f'(t)g(t-u) + f(t)g'(t-u))\overline{f(t)g(t-u)}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi'(t)|g(t-u)|^2 - ig'(t-u)\overline{g(t-u)}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi'(t)|g(t-u)|^2 dt - i\left[\frac{|g(t-u)|^2}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi'(t)|g(t-u)|^2 dt
\end{aligned}$$

c) La transformée de Fourier à fenêtre d'une fonction de la forme considérée ici permet de retrouver la fréquence instantanée (c'est-à-dire ϕ') moyennée sur une fenêtre de même support

que $g(.-u)$. Si on est dans le cas précis où $f(t) = e^{i\phi(t)}$, on a donc intérêt à prendre une fenêtre à petit suport spatial (quitte à ce que son support fréquentiel soit large), de façon à reconstruire assez précisément ϕ'.
3. Dans ce cas, $|Sf(u,\xi)| = |Sf(u,-\xi)|$ (car $Sf(u,.)$ est la transformée de Fourier d'un signal réel) donc l'intégrale de gauche devient nulle (c'est l'intégrale d'une fonction impaire).

Exercice 5

1. D'après le cours :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} Sf(u',\xi')g(t-u')e^{i\xi' t}d\xi' du'$$

Donc, par définition de Sf :

$$\begin{aligned} Sf(u,\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(t-u)Sf(u',\xi')g(t-u')e^{i(\xi'-\xi)t}d\xi' du' dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} Sf(u',\xi')K(u,\xi,u',\xi')du'd\xi' \end{aligned}$$

si on pose $K(u,\xi,u',\xi') = \int_{\mathbb{R}} g(t-u)g(t-u')e^{i(\xi'-\xi)t}dt$.
2. a) D'après l'égalité $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |Sf(u,\xi)|^2 du d\xi$ qui se trouve dans le cours, si f est dans L^2, alors Sf aussi.
b) D'après la définition de K, $P(Sf) = Sf$ pour toute f. Donc $P = \mathrm{Id}$ sur V.
Il suffit donc de montrer $P = 0$ sur l'orthogonal de V. Il faut donc montrer que $P(h) = 0$ pour toute $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$ telle que $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{Sf(u,\xi)}h(u,\xi)dud\xi$ pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$. Supposons une telle h fixé.
Pour tout u et pour tout ξ, $K(u,\xi,.,.) = \overline{S(g(.-u)e^{i\xi t})}$ donc :

$$Ph(u,\xi) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{S(g(.-u)e^{i\xi t})}(u',\xi')h(u',\xi')du'd\xi' = 0$$