

## Feuille d'exercices n°7

### Exercice 1

Soit  $p \in [0; 1]$ . Soit  $\epsilon$  une variable aléatoire qui vaut 0 avec probabilité  $p$  et 1 avec probabilité  $1 - p$ . On considère le processus tel que  $X[n] = (-1)^{n+\epsilon}$ .

1. Dire en fonction de  $p$  s'il est stationnaire? stationnaire au sens large?
2. Pour les cas où il est stationnaire, calculer son espérance et son autocovariance.

### Exercice 2 : processus gaussiens

Dans cet exercice, on admet que, si une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  est gaussienne, alors, pour toute fonction linéaire  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $L(X)$  est également une variable aléatoire gaussienne.

1. a) Soit  $X[n]$  un processus gaussien stationnaire et  $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  à support fini. Montrer que  $X \star h$  est toujours un processus gaussien stationnaire.

b) Quelle est l'espérance de  $X \star h$ ? son autocovariance?

2. Soit  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme  $\gamma(\theta) = a_{-d}e^{-id\theta} + \dots + a_d e^{id\theta}$ , où les  $a_{-d}, \dots, a_d$  sont des réels.

Montrer qu'il existe un processus gaussien stationnaire d'espérance nulle et dont la covariance satisfait  $\hat{R}_X = |\gamma|^2$ .

3. [Plus difficile] Montrer plus généralement que, pour toute fonction  $F$  paire, positive et  $2\pi$ -périodique telle que  $\int_{-\pi}^{\pi} F^2(s) ds < +\infty$ , il existe un processus gaussien stationnaire d'espérance nulle et dont la covariance satisfait  $\hat{R}_X = F$ .

### Exercice 3 : estimation de $\hat{R}_X$

Soit  $X[n]$  un processus du second ordre, stationnaire au sens large et centré. On pose :

$$F_N(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{-in\omega} \right|^2$$

et l'on propose d'utiliser  $F_N$  comme estimateur de  $\hat{R}_X$ .

1. Montrer que l'on peut récrire  $F_N$  de la façon suivante :

$$F_N(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{|k| < N} \sum_{p=0}^{N-1-|k|} X[p] X[p+|k|] e^{-ik\omega}$$

2. a) Calculer le biais  $B_N(\omega) = E(F_N(\omega)) - \hat{R}_X(\omega)$ .

b) Montrer que celui-ci tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , sous des hypothèses sur  $R_X[k]$  que l'on précisera.

3. On suppose que  $X$  est un bruit blanc gaussien. Calculer la variance  $V_N(\omega) = E(|F_N(\omega) - E(F_N(\omega))|^2)$ . Montrer que l'estimateur n'est pas « consistant », c'est-à-dire que  $V_N(\omega) \not\rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow +\infty$ .

4. On découpe le signal en  $L$  morceaux : on pose  $X_l[n] = X[n + (l - 1)M]$  pour  $0 \leq n \leq M - 1$  et  $X_l[n] = 0$  sinon. On considère alors  $F_{l,M}$  l'estimateur précédent appliqué au signal  $X_l$  :

$$F_{l,M}(\omega) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} X_l[n] e^{-in\omega} \right|^2$$

On considère alors le nouvel estimateur pour  $\hat{R}_X(\omega)$  qui est construit simplement en moyennant les estimateurs  $F_{l,M}$  :

$$\tilde{F}_{L,M}(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L F_{l,M}(\omega)$$

On suppose toujours que  $X$  est un bruit blanc gaussien. Calculer le biais et la variance de ce nouvel estimateur. Comparer ces résultats avec les précédents.

#### Exercice 4 : filtrage adapté

On veut détecter un signal connu  $f[n]$  translaté en un point  $p$  inconnu et dégradé par un bruit stationnaire  $B[n]$ . Le signal observé s'écrit donc :

$$D[n] = f[n - p] + B[n]$$

La détection se fait par un filtrage  $h[n]$  suivi d'un seuillage.

1. On définit le rapport signal sur bruit du filtrage par :

$$\rho[n] = \frac{|f \star h[n - p]|^2}{E(|B \star h[n]|^2)}$$

a) Exprimer  $f \star h[0]$  en fonction de  $\hat{f}$  et  $\hat{h}$ , sous la forme d'une intégrale.

b) Exprimer  $E(|B \star h[n]|^2)$  en fonction de  $\hat{h}$  et de la puissance spectrale  $\hat{R}_B$  de  $B$ .

2. Soit  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} \text{ tq } \hat{R}_B(\omega) = 0 \text{ et } \hat{f}(\omega) \neq 0\}$ .

a) Montrer que si  $\Omega$  est de mesure non-nulle, alors il existe  $h$  tel que  $\rho[p] = +\infty$ .

b) Montrer que si  $\hat{R}_B$  ne s'annule pas, alors :

$$\rho[p] \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\hat{R}_B(\omega)} d\omega$$

et en déduire l'expression d'un filtre  $h$  atteignant cette borne.

c) Montrer que si  $B$  est un bruit blanc, on peut choisir ce filtre indépendamment de la variance du bruit.

3. On détecte la présence et la position du signal par un seuillage :

$$\theta_T(D \star h[n]) \quad \text{avec} \quad \theta_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \geq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donner une valeur de  $T$  en fonction de  $f$  et  $h$  et une condition sur  $\rho[p]$  pour que  $\theta_T(D \star h[p]) = 1$  avec forte probabilité et  $\theta_T(D \star h[n]) = 0$  avec forte probabilité pour  $n$  loin de  $p$ .

(On supposera que  $f \star h[k] \rightarrow 0$  lorsque  $|k| \rightarrow +\infty$ .)