

# Feuille d'exercices n°7

## Corrigé

### Exercice 1

1. L'espérance de  $X[n]$  vaut  $E(X[n]) = p \cdot (-1)^n + (1-p) \cdot (-1)^{n+1} = (-1)^n(2p-1)$ . Pour que le processus soit stationnaire (au sens strict ou large), il faut que l'espérance de  $X[n]$  soit indépendante de  $n$ . Il faut donc avoir  $2p-1=0$ , soit  $p=1/2$ .

Donc si  $p \neq 1/2$ ,  $X$  n'est pas stationnaire.

Montrons que si  $X = 1/2$ , alors  $X$  est stationnaire au sens strict.

Pour tout ensemble d'indices  $n_1, \dots, n_s$ , la loi de  $(X[n_1], \dots, X[n_s])$  est la loi de  $((-1)^{n_1+\epsilon}, \dots, (-1)^{n_s+\epsilon})$ . Si  $p = 1/2$ ,  $(-1)^\epsilon$  et  $(-1)^{\epsilon+1}$  sont de même loi donc la loi de  $(X[n_1], \dots, X[n_s])$  est la loi de  $((-1)^{n_1+1+\epsilon}, \dots, (-1)^{n_s+1+\epsilon})$ , c'est-à-dire que c'est la même loi que  $(X[n_1+1], \dots, X[n_s+1])$ . Par récurrence, on en déduit que  $(X[n_1], \dots, X[n_s])$  et  $(X[n_1+k], \dots, X[n_s+k])$  sont de même loi pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Le processus est donc stationnaire.

2.  $E(X[n]) = 0$ , comme on l'a vu à la question précédente.

$$R_X[k] = \text{Cov}(X[0], X[k]) = E((-1)^\epsilon (-1)^{\epsilon+k}) = (-1)^k$$

### Exercice 2

1. a) Le cours dit que, si  $X$  est stationnaire, alors  $X \star h$  aussi. Montrons donc seulement que  $X \star h$  est gaussien.

Soit  $p \geq 0$  tel que  $h[k] = 0$  si  $|k| > p$ .

Soient  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  quelconques (avec  $n_1 \leq n_2$ ). Il faut montrer que  $(X \star h[n_1], \dots, X \star h[n_2])$  est un vecteur gaussien. Définissons  $A \in \mathcal{M}_{n_2-n_1+1, n_2-n_1+2p+1}(\mathbb{R})$  par :

$$A = \begin{pmatrix} h[p] & h[p-1] & \dots & h[-p] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h[p] & \dots & h[-p+1] & h[-p] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & h[p] & \dots & h[-p] \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{pmatrix} X \star h[n_1] \\ \vdots \\ X \star h[n_2] \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X[n_1-p] \\ \vdots \\ X[n_2+p] \end{pmatrix}$$

donc, d'après le résultat admis,  $(X \star h[n_1], \dots, X \star h[n_2])$  est un vecteur gaussien.

b) L'espérance est  $E(X[0]) \left( \sum_n h[n] \right)$ . La covariance est  $R_X \star h \star \tilde{h}$ , si on pose  $\tilde{h}[k] = h[-k]$  (résultat du cours).

2. Soit  $h$  tel que  $h[k] = a_k$  si  $|k| \leq d$  et  $h[k] = 0$  sinon. Alors  $\hat{h} = \gamma$ .  
 Soit  $X_0$  un bruit blanc gaussien tel que  $E(X_0[0]^2) = 1$ . Alors, d'après les questions précédentes,  $X = X_0 \star h$  est toujours un processus gaussien.  
 De plus, son autocovariance est  $R_X = R_{X_0} \star h \star \tilde{h}$ , c'est-à-dire que  $\hat{R}_X = \hat{R}_{X_0} |\hat{h}|^2 = |\hat{h}|^2 = |\gamma|^2$ .
3. Soit  $G$  telle que  $\hat{G} = F$ . La fonction  $G$  est réelle (car  $F$  est paire et réelle) et paire (car sa transformée de Fourier est réelle).

**Lemme 2.1.** *Pour tout  $k \geq 0$ , la matrice  $M_k = \begin{pmatrix} G^{[0]} & G^{[1]} & \dots & G^{[2k]} \\ G^{[1]} & G^{[0]} & \dots & G^{[2k-1]} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ G^{[2k]} & & \dots & G^{[0]} \end{pmatrix}$  est semidéfinie positive.*

*Démonstration.* Soit  $x = (x_{-k}, \dots, x_k)$  un  $(2k+1)$ -uplet quelconque. Montrons que  $xM_k^t x \geq 0$ .  
 On a :

$$\begin{aligned} xM_k^t x &= \sum_{-k \leq j_1, j_2 \leq k} x_{j_1} x_{j_2} G[j_1 - j_2] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{-k \leq j_1, j_2 \leq k} x_{j_1} x_{j_2} \int_{-\pi}^{\pi} F(s) e^{i(j_1 - j_2)s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(s) \left| \sum_j x_j e^{ijs} \right|^2 ds \geq 0 \end{aligned}$$

□

**Lemme 2.2.** *Il existe une suite  $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  telle que :*

- Pour tout  $k$ ,  $v_k$  est un élément de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  tel que  $v_k[s] = 0$  si  $|s| > |k|$ .
- Pour tous  $k, l$ ,  $\langle v_k, v_l \rangle = G[k - l]$ .

*Démonstration.* On les construit par récurrence sur  $|k|$ .

On prend  $v_0[s] = 0$  si  $s \neq 0$  et  $v_0[0] = \sqrt{G[0]}$ .

Si on a défini  $v_{-(k-1)}, \dots, v_{k-1}$  avec  $k \geq 1$ , définissons  $v_{-k}$  et  $v_k$ . On peut considérer les  $v_{-(k-1)}, \dots, v_{k-1}$  comme des vecteurs de  $\mathbb{R}^{2k+1}$  dont les première et dernière coordonnées sont nulles.

Puisque  $M_k$  est positive, il existe  $w_{-k}, \dots, w_k \in \mathbb{R}^{2k+1}$  tels que, pour tous  $n, m$  compris entre  $-k$  et  $k$ ,  $\langle w_n, w_m \rangle = G[|n - m|]$ . (C'est un résultat classique sur les matrices symétriques qui se démontre en écrivant  $M_k = {}^t W W$  et en prenant pour  $w_n$  les colonnes de  $W$ .)

On vérifie qu'il existe  $U$ , une application unitaire sur  $\mathbb{R}^{2k+1}$  telle que  $U(w_l) = v_l$  si  $-k < l < k$ .  
 On pose  $v_{-k} = U(w_{-k})$  et  $v_k = U(w_k)$ . □

On définit les  $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  comme dans le lemme précédent.

Soient  $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, d'espérance nulle et de variance 1. Pour tout  $n$ , on pose  $X[n] = v_n[-|n|]Y_{-|n|} + \dots + v_n[|n|]Y_{|n|} = \langle v_n, Y \rangle$ .

Pour tout  $n$ ,  $X[n]$  est d'espérance nulle. Pour tous  $n, m$ ,  $E(X[n]X[m]) = \langle v_n, v_m \rangle = G[n - m]$ .

On a donc  $R_X = G$  et  $\hat{R}_X = F$ .

### Exercice 3

1.

$$\begin{aligned}
 F_N(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_{0 \leq n_1, n_2 < N} X[n_1]X[n_2]e^{-i(n_1-n_2)\omega} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{0 \leq n_2 < N} \sum_{-n_2 \leq k < N-n_2} X[n_2]X[n_2+k]e^{-ik} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{|k| < N} e^{-ik} \sum_{\max(0, -k) \leq n_2 < \min(N, N-k)} X[n_2]X[n_2+k] \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{|k| < N} e^{-ik} \sum_{0 \leq n_2 < N-|k|} X[n_2]X[n_2+|k|]
 \end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned}
 B_N(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_{|k| < N} \sum_{p=0}^{N-1-|k|} R_X(k)e^{-ik\omega} - \hat{R}_X(\omega) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{|k| < N} (N-|k|)R_X(k)e^{-ik\omega} - \hat{R}_X(\omega) \\
 &= \sum_{|k| < N} R_X(k)e^{-ik\omega} - \frac{1}{N} \sum_{|k| < N} |k|R_X(k)e^{-ik\omega} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_X(k)e^{-ik\omega} \\
 &= - \left( \frac{1}{N} \sum_{|k| < N} |k|R_X(k)e^{-ik\omega} + \sum_{|k| \geq N} R_X(k)e^{-ik\omega} \right)
 \end{aligned}$$

b) Si on suppose que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} R_X(k) < +\infty$ , alors chacun des deux termes de la somme précédente converge vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ .

En effet, pour le deuxième, c'est clair : il s'agit du reste de la somme partielle d'une série qui converge absolument.

Pour voir que c'est également vrai pour le premier terme, on peut par exemple scinder la somme en deux, en séparant les  $k$  tels que  $|k| < \epsilon N$  et les autres. La somme sur les  $k$  tels que  $|k| < \epsilon N$  est inférieure à  $\epsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_X(k)$  et l'autre peut se majorer par un reste de somme partielle de cette série, et donc tend vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ . En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0, on obtient le résultat.

3. On note  $\sigma^2 = E|X[0]|^2$ .

$$E(|F_N(\omega)|^2) = \frac{1}{N^2} \sum_{0 \leq n_1, n_2, n_3, n_4 < N} E(X[n_1]X[n_2]X[n_3]X[n_4])e^{-i(n_1-n_2+n_3-n_4)\omega}$$

On utilise le fait que  $E(X[n_1]X[n_2]X[n_3]X[n_4]) = 0$  si l'un des quatre entiers  $n_1, n_2, n_3, n_4$  est différents des trois autres, que  $E(X[n_1]X[n_2]X[n_3]X[n_4]) = \sigma^4$  si les entiers sont égaux par paires et que  $E(X[n_1]X[n_2]X[n_3]X[n_4]) = 3\sigma^4$  si les quatre entiers sont égaux (moment d'ordre 4 d'une loi normale).

En réordonnant correctement la somme, on trouve :

$$E(|F_N(\omega)|^2) = \frac{\sigma^4}{N^2} \left( 2N^2 + \left| \sum_{0 \leq k < N} e^{-2ik\omega} \right|^2 \right)$$

Or  $V_N(\omega) = E|F_N(\omega)|^2 - E(F_N(\omega))^2$ . Par un calcul similaire à celui de la question 2.a), on voit que  $E(F_N(\omega)) = \sigma^2$ . Donc :

$$V_N(\omega) = \frac{\sigma^4}{N^2} \left( N^2 + \left| \sum_{0 \leq k < N} e^{-2ik\omega} \right|^2 \right)$$

Ceci ne tend pas vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ .

4. Les calculs des questions 2. et 3. montrent que  $E(F_{l,M}(\omega)) = \sigma^2$  et  $E(|F_{l,M}(\omega) - E(F_{l,M}(\omega))|^2) =$

$$V_M(\omega) = \frac{\sigma^4}{M^2} \left( M^2 + \left| \sum_{0 \leq k < M} e^{-2ik\omega} \right|^2 \right).$$

En utilisant l'indépendance de  $F_{1,M}, \dots, F_{L,M}$ , on voit que :

$$E(\tilde{F}_{L,M}(\omega)) = \sigma^2 = E(\hat{R}_X(\omega))$$

L'estimateur n'est donc pas biaisé.

Sa variance est :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{F}_{L,M}(\omega)) &= \frac{1}{L^2} \left( \sum_{l=1}^L \text{Var}(F_{l,M}(\omega)) \right) \\ &= \frac{\sigma^4}{(LM)^2} \left( M^2 + \left| \sum_{0 \leq k < M} e^{-2ik\omega} \right|^2 \right) \end{aligned}$$

Le biais est toujours le même. En revanche, à nombre de coefficients égal ( $N = LM$ ), la variance est nettement plus petite (environ  $L^2$  fois) dans le deuxième cas.

#### Exercice 4

1. a)  $f \star h = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{h})$  (où  $\mathcal{F}^{-1}$  désigne la transformée de Fourier inverse).

Par la formule d'inversion pour les signaux discrets :

$$f \star h[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)\hat{h}(r)dr$$

b) Le signal  $B$  est stationnaire. La loi de  $B \star h[n]$  est donc la même que la loi de  $B \star h[0]$ . Donc  $E(|B \star h[n]|^2) = E(|B \star h[0]|^2)$ .

Cette espérance est l'autocorrélation de  $B \star h$  en 0, c'est-à-dire  $R_{B \star h}(0)$ . D'après le cours,  $\hat{R}_{B \star h}(r) = |\hat{h}(r)|^2 \hat{R}_B(r)$ .

D'après la formule d'inversion pour la transformée de Fourier dans le cas discret :

$$E(|B \star h[n]|^2) = E(|B \star h[0]|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{h}(r)|^2 \hat{R}_B(r)dr$$

2. a) Soit  $h$  le filtre dont la transformée de Fourier vaut  $\hat{h}(r) = 1_{\Omega}(r)\overline{\hat{f}(r)}$ . Alors, d'après la question 1.b),  $E(|B \star h[n]|^2) = 0$  pour tout  $n$ . En effet,  $|\hat{h}(r)|^2 \hat{R}_B(r) = 0$  pour tout  $r$ . De plus,  $f \star h[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)\hat{h}(r)dr = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega \cap [-\pi; \pi]} |\hat{f}(r)|^2 dr \neq 0$ . Donc  $\rho[p]$  est la division par 0 d'un réel strictement positif. Il vaut  $+\infty$ .

Remarque : le filtre  $h$  obtenu par cette méthode a la désagréable propriété de ne pas appartenir à  $l^1(\mathbb{N})$  (ce qui pose problème pour calculer la convolution  $D \star h$ ). On peut néanmoins l'approximer par des filtres appartenant à  $l^1$  en utilisant le fait que les fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sont denses dans  $l^1$ .

b) D'après les questions 1.a) et 1.b) puis par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \rho[p] &= \frac{\frac{1}{(2\pi)^2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)\hat{h}(r)dr \right)^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{R}_B(r)|\hat{h}(r)|^2 dr} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\hat{f}(r)}{\sqrt{\hat{R}_B(r)}} \sqrt{\hat{R}_B(r)}\hat{h}(r)dr \right)^2}{\int_{-\pi}^{\pi} \hat{R}_B(r)|\hat{h}(r)|^2 dr} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\hat{f}(r)|^2}{\hat{R}_B(r)} dr \right) \left( \int_{-\pi}^{\pi} \hat{R}_B(r)|\hat{h}(r)|^2 dr \right)}{\int_{-\pi}^{\pi} \hat{R}_B(r)|\hat{h}(r)|^2 dr} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\hat{f}(r)|^2}{\hat{R}_B(r)} dr \end{aligned}$$

Pour que l'égalité soit atteinte, il faut qu'on ait l'égalité dans Cauchy-Schwarz : il faut que  $\frac{\hat{f}(r)}{\sqrt{\hat{R}_B(r)}}$  et  $\sqrt{\hat{R}_B(r)}\hat{h}(r)$  soient colinéaires. Il faut donc que  $\hat{h}$  soit colinéaire à :

$$\frac{\overline{\hat{f}(r)}}{\hat{R}_B(r)}$$

c) Si  $B$  est un bruit blanc,  $\hat{R}_B(r) = \sigma^2$ , où  $\sigma^2$  est la variance de  $B$ .

Si on prend  $\hat{h} = \overline{\hat{f}(r)}$ , on a bien que  $\hat{h}$  est colinéaire à  $\overline{\hat{f}}/\hat{R}_B$ , quel que soit  $\sigma$ , et  $h$  ne dépend pas de  $\sigma$ .

3. On va choisir  $T$  entre 0 et  $|f \star h[p]|$ . Essayons alors de majorer les probabilités pour que  $\theta_T(D \star h[p]) \neq 1$  et  $\theta_T(D \star h[n]) \neq 0$  pour  $n$  loin de  $p$ .

On utilisera l'inégalité suivante, vraie pour toute variable aléatoire  $Y$  et tout  $M > 0$  :

$$P(|Y| \geq M) \leq \frac{1}{M^2} E(|Y|^2)$$

(Il s'agit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.)

$$\begin{aligned}
P(\theta_T(D \star h[p]) \neq 1) &= P(|f \star h[p] + B \star h[p]| < T) \\
&\leq P(|B \star h[p]| > |f \star h[p]| - T) \\
&\leq \frac{1}{(|f \star h[p]| - T)^2} E|B \star h[p]|^2 \\
&= \frac{1}{\rho[p]^2} \frac{|f \star h[p]|^2}{(|f \star h[p]| - T)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\theta_T(D \star h[n]) \neq 0) &= P(|f \star h[n] + B \star h[n]| \geq T) \\
&\leq P(|B \star h[n]| \geq T - |f \star h[n]|) \\
&\leq \frac{1}{(T - |f \star h[n]|)^2} E|B \star h[n]|^2 \\
&= \frac{1}{\rho[p]^2} \frac{|f \star h[p]|^2}{(T - |f \star h[n]|)^2} \\
&\rightarrow \frac{1}{\rho[p]^2} \frac{|f \star h[p]|^2}{T^2}
\end{aligned}$$

On souhaite que les deux majorants trouvés soient très inférieurs à 1. Cela revient donc à dire qu'on veut :

$$\frac{1}{\rho[p]^2} \min \left( \frac{|f \star h[p]|^2}{(|f \star h[p]| - T)^2}, \frac{|f \star h[p]|^2}{T^2} \right) \ll 1$$

soit :

$$\frac{|f \star h[p]|^2}{\rho[p]^2} \frac{1}{\max(T, |f \star h[p]| - T)^2} \ll 1$$

On a  $\max(T, |f \star h[p]| - T) \geq |f \star h[p]|/2$ , avec égalité pour  $T = |f \star h[p]|/2$ . On a donc intérêt à prendre  $T = |f \star h[p]|/2$  et la condition sur  $\rho[p]$  devient alors :

$$\rho[p] \gg 2$$