Transformée en paquets d'onde

1^er^ octobre 2015

1 Transformée de Fourier

Définition 1.1. *La transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est, par définition*

$$(\mathcal{F}f) : \xi \in \mathbb{R}^n \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

On rappelle que la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par $\mathcal{F}$: la transformée de Fourier d'une fonction de Schwartz est encore une fonction de Schwartz.

Dans ce paragraphe, on démontre certaines propriétés de base de la transformée de Fourier. Le point de départ est de calculer la transformée de Fourier des fonctions gaussiennes.

Lemme 1.2. *L'ensemble des fonctions gaussiennes est stable par la transformée de Fourier. Pour tout $a > 0$ et toute dimension $n \geq 1$,*

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-|\xi|^2/4a}.$$

Démonstration. Commençons par le cas de la dimension 1 d'espace, avec $a = 1$. Posons $f(x) = e^{-|x|^2}$. La transformée de Fourier de f, notée $g(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)$ est une fonction régulière qui vérifie

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)'(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-ix\xi} e^{-x^2}\, dx \\ &= \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \partial_x e^{-x^2}\, dx = \frac{-i}{2} \int_{\mathbb{R}} (-i\xi) e^{-ix\xi} e^{-x^2}\, dx\end{aligned}$$

donc

$$(\mathcal{F}f)'(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(\mathcal{F}f)(\xi).$$

En utilisant

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

on en déduit que

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = e^{-\xi^2/4}(\mathcal{F}f)(0) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}.$$

On en déduit le résultat par des manipulations simples : si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors la transformée de Fourier de $f(x/\lambda)$ est $|\lambda|^n \widehat{f}(\lambda\xi)$. De plus la transformée de Fourier de $f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$ est $\widehat{f_1}(\xi_1)\cdots \widehat{f}_n(\xi_n)$. □

Théorème 1.3. *Si u appartient à la classe de Schwartz alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

Démonstration. Étant donné $\varepsilon > 0$ introduisons

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2|\xi|^2}\,d\xi.$$

En utilisant le lemme précédent on calcule (en ne manipulant que des intégrales convergentes)

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}u(y)e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2|\xi|^2}\,dyd\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int u(y)e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|x-y|^2}\varepsilon^{-n}\,dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \big(u(x+\varepsilon y) - u(x)\big)e^{-\frac{1}{2}|y|^2}\,dy + u(x). \end{aligned}$$

Puisque

$$|u(x+\varepsilon y) - u(x)| \le \varepsilon\,|y|\,\|u'\|_{L^\infty}$$

en passant à la limite on obtient le résultat voulu. □

Théorème 1.4. *Si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors*

$$\int \widehat{\varphi}\psi \, dx = \int \varphi \widehat{\psi} \, dy.$$

Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\int f(x)\overline{g}(x) \, dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)} \, d\xi.$$

En particulier,

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2}^2. \tag{2}$$

Démonstration. Ecrivons que

$$\begin{aligned} \int \widehat{\varphi}\psi \, dx &= \int \left(\int e^{-iy\cdot x} \varphi(y) \, dy \right) \psi(x) \, dx \\ &= \int \left(\int e^{-iy\cdot x} \psi(x) \, dx \right) \varphi(y) \, dy = \int \varphi \widehat{\psi} \, dy. \end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième identité on applique la première avec $\varphi = f$ et $\overline{g} = \widehat{\psi}$. Alors

$$\int f\overline{g} = \int \varphi \widehat{\psi} = \int \widehat{\varphi}\psi = \int \widehat{f} \mathcal{F}^{-1}\overline{g}.$$

Puis on vérifie (à l'aide du théorème d'inversion de Fourier) que

$$(\mathcal{F}^{-1}\overline{g})(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\xi}\overline{g}(y) \, dy = (2\pi)^{-n} \overline{\int e^{-iy\xi} g(y) \, dy} = (2\pi)^{-n} \overline{\widehat{g}(\xi)}.$$

La troisième identité est alors évidente. $\square$

Remarque 1.5. *La relation (2) permet, par continuité, d'étendre la définition de $\mathcal{F}$ à $L^2(\mathbb{R}^n)$, en utilisant le fait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

De la même manière, l'inverse $\mathcal{F}^{-1}$, donné sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par la formule (1), s'étend par continuité à tout $L^2(\mathbb{R}^n)$, et est l'application inverse de $\mathcal{F}$.

2 Principe d'incertitude

Pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tous $p, q \in \mathbb{R}^n$, on définit :

$$\phi_{p,q}^h : x \in \mathbb{R}^n \to \left(\frac{h}{4\pi^3} \right)^{n/4} e^{ip(x-q)} e^{-\frac{h}{2}|x-q|^2}$$

Proposition 2.1. *Pour tous h, p, q*

$$\hat{\phi}^h_{p,q}(\xi) = \left(\frac{1}{\pi h}\right)^{n/4} e^{-i\xi q} e^{-\frac{1}{2h}|\xi - p|^2}$$

Démonstration. Cela se déduit du lemme 1.2, à l'aide des deux relations suivantes, valables pour toute $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} &\forall p \in \mathbb{R}^n \qquad \mathcal{F}\left(g(x)e^{ipx}\right)(\xi) = (\mathcal{F}g)(\xi - p) \\ &\forall q \in \mathbb{R}^n \qquad \mathcal{F}\left(g(. - q)\right)(\xi) = e^{-i\xi q}(\mathcal{F}g)(\xi) \end{aligned}$$

□

De manière informelle, la fonction $\phi^h_{p,q}$ est « localisée », au voisinage de q, sur un intervalle de taille caractéristique $1/\sqrt{h}$. La fonction $\hat{\phi}^h_{p,q}$ est également localisée, au voisinage de p, mais sur un intervalle dont la taille caractéristique est de l'ordre de $\sqrt{h}$. Les tailles caractéristiques sont inverses l'une de l'autre ; améliorer la localisation en espace dégrade la localisation en fréquence et vice-versa.

Un théorème décrit formellement ce phénomène.

Théorème 2.2. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ quelconque. Soient $p, q \in \mathbb{R}^n$. Alors*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x - q|^2 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi - p|^2 |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \geq \frac{n}{2}(2\pi)^{n/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx\right)$$

et l'égalité est atteinte si et seulement si f est proportionnelle à $\phi^h_{p,q}$ pour un certain $h > 0$.

Démonstration. Quitte à considérer, au lieu de f, la fonction $g(x) = f(x + q)e^{-ipx}$, on peut supposer $p = q = 0$. On fait cette hypothèse dans la suite.

On peut également supposer que f appartient à l'ensemble

$$E = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ tq } (x \to |x| f(x)) \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ et } (\xi \to |\xi| \mathcal{F}f(\xi)) \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

En effet, si ce n'est pas le cas, le membre de gauche de l'inégalité à démontrer est infini et l'inégalité est donc vraie.

On définit

$$F : f \in E \to (x \to xf(x)) \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$$
$$G : f \in E \to (\mathcal{F}^{-1}(i\xi_1(\mathcal{F}f)), ..., \mathcal{F}^{-1}(i\xi_n(\mathcal{F}f))) \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$$

On remarque qu'au sens des distributions, $Gf = \nabla f$.

La démonstration repose sur trois lemmes.

Lemme 2.3. *Pour toute $f \in E$, il existe une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$||f - f_k||_2 \to 0 \qquad ||F(f - f_k)||_2 \to 0 \qquad ||G(f - f_k)||_2 \to 0.$$

Lemme 2.4. *Pour toute $f \in E$*

$$-\operatorname{Re}\langle Ff, Gf\rangle = \frac{n}{2}||f||_2^2.$$

Lemme 2.5. *Soit $\lambda > 0$. Pour toute $f \in E$, on a l'égalité $Ff = -\lambda Gf$ si et seulement si $f = C\phi_{0,0}^{1/\lambda}$ pour une certaine constante $C \in \mathbb{C}$.*

Puisque $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ est une isométrie, $(2\pi)^{n/2}\mathcal{F}^{-1}$ est également une isométrie. Pour toute $f \in E$, on a donc

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} = (2\pi)^{n/2}||Gf||_2.$$

On déduit donc du lemme 2.4

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x-q|^2|f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi-p|^2|\mathcal{F}f(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}\\
&= (2\pi)^{n/2}||Ff||_2||Gf||_2\\
&\geq -(2\pi)^{n/2}\operatorname{Re}\langle Ff, Gf\rangle\\
&= \frac{n}{2}(2\pi)^{n/2}||f||^2\\
&= \frac{n}{2}(2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2dx.
\end{aligned}$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $||Ff||_2||Gf||_2 = -\operatorname{Re}\langle Ff, Gf\rangle$, ce qui est équivalent à $Ff = -\lambda Gf$ pour un certain réel $\lambda > 0$. D'après le lemme 2.5, une telle égalité est équivalente au fait que f soit proportionnelle à $\phi_{0,0}^h$ pour un certain $h > 0$.

Démonstration du lemme 2.3. On indique simplement une méthode possible pour construire $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On laisse en exercice le fait de démontrer que cette suite vérifie bien les propriétés de convergence requises.

Soit $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\chi = 1 \text{ sur } [-1;1]^n \qquad \text{et} \qquad \chi = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n - [-2;2]^n.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$\begin{aligned} \chi_k &: x \in \mathbb{R}^n \to \chi(2^{-k}x) \\ f_k &= \chi_k \mathcal{F}^{-1}((\mathcal{F}f)\chi_k) \end{aligned}$$

La suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi définie convient. □

Démonstration du lemme 2.4. Par le lemme 2.3, il suffit de démontrer le lemme pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On peut ensuite l'étendre à tout E par densité.

Pour une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $G(f) = \nabla f$ et on a alors

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}\langle Ff, Gf\rangle &= -\frac{1}{2}(\operatorname{Re}\langle Ff, Gf\rangle + \operatorname{Re}\langle Gf, Ff\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{Re}\langle xf, \nabla f\rangle - \operatorname{Re}\langle \nabla f, xf\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{Re}\langle \operatorname{div}(xf), f\rangle - \operatorname{Re}\langle x.\nabla f, f\rangle) \\ &= \frac{n}{2}\operatorname{Re}\langle f, f\rangle \\ &= \frac{n}{2}||f||^2. \end{aligned}$$

□

Démonstration du lemme 2.5. Si $f = C\phi_{0,0}^{1/\lambda}$, le calcul montre que la propriété est vérifiée. Réciproquement, si f vérifie la propriété, alors, au sens des distributions

$$\nabla(e^{\frac{1}{2\lambda}|x|^2} f) = \left(\nabla f + \frac{1}{\lambda}xf\right) e^{\frac{1}{2\lambda}|x|^2} = 0.$$

Une distribution de gradient nul est constante donc il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que

$$e^{\frac{1}{2\lambda}|x|^2} f = C \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = C\left(4\pi^3\lambda\right)^{n/4}\phi_{0,0}^{1/\lambda}$$

□

□

3 Définition de la transformée en paquets d'onde

Définition 3.1. *Pour tout $h > 0$ et toute $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on définit*

$$W^h f : (p, q) \in \mathbb{R}^{2n} \to \langle \phi_{p,q}^h, f \rangle = \left(\frac{h}{4\pi^3} \right)^{n/4} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\frac{h}{2}|x-q|^2} e^{-ip(x-q)} dx.$$

On appelle $W^h f$ la transformée en paquets d'onde de f (ou, éventuellement, la transformée de Fourier à fenêtre de f).

Remarque 3.2. *Nos paquets d'onde sont ici définis à l'aide d'une fenêtre gaussienne, $x \to e^{-\frac{h}{2}|x|^2}$, translatée en temps et en fréquence. Dans ce chapitre, on n'étudiera que ce cas-là mais d'autres choix sont possibles.*

Proposition 3.3. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $q \in \mathbb{R}^n$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |W^h f(p, q)|^2 dp = \left(\frac{h}{\pi} \right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 e^{-h|x-q|^2} dx$$

Pour tout $p \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |W^h f(p, q)|^2 dq = \left(\frac{1}{4\pi^3 h} \right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-\frac{1}{h}|\xi-p|^2} d\xi$$

Démonstration. Pour tous p, q, $W^h f(p, q) = e^{ipq} \mathcal{F}(f \phi_{0,q}^h)(p)$. Puisque la transformée de Fourier conserve la norme (au facteur multiplicatif près) :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |W^h f(p, q)|^2 dp = (2\pi)^n ||f \phi_{0,q}^h||_2^2,$$

ce qui est le résultat voulu.

D'autre part, $W^h f(p, q) = \langle \phi_{p,q}^h, f \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle \hat{\phi}_{p,q}^h, \hat{f} \rangle = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \hat{\phi}_{p,0}^h)(q)$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |W^h f(p, q)|^2 dq = \frac{1}{(2\pi)^n} ||\hat{f} \hat{\phi}_{p,0}^h||_2^2$$

□

Théorème 3.4. *Pour tout $h > 0$ et toute $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $W^h f$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. De plus, W^h est unitaire :*

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) \qquad ||f||_2 = ||W^h f||_2.$$

Démonstration. On intègre d'abord sur p, en utilisant la proposition précédente.

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathbb{R}^n} |W^h(p,q)|^2 dpdq &= \left(\frac{h}{\pi}\right)^{n/2} \int\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 e^{-h|x-q|^2} dxdq \\ &= \left(\frac{h}{\pi}\right)^{n/2} \left(\frac{\pi}{h}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.5. *L'adjoint de W^h, $W^{h*} : F \in L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to W^{h*}F \in L^2(\mathbb{R}^n)$, vérifie $W^{h*}W^h = Id$. Formellement, cet adjoint s'écrit*

$$\begin{aligned}W^{h*}F(x) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(p,q)\phi^h_{p,q}(x) dpdq \\ &= \left(\frac{h}{4\pi^3}\right)^{n/4} \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(p,q) e^{-\frac{h}{2}|x-q|^2} e^{ip(x-q)} dpdq.\end{aligned}$$

Exemple 3.6 (Transformée en paquets d'onde d'un paquet d'onde)**.** *Soient $h_0 > 0$ et $p_0, q_0 \in \mathbb{R}^n$ fixés. Pour tout $h > 0$ et pour tous $p, q \in \mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned}W^h(\phi^{h_0}_{p_0,q_0})(p,q) = \left(\frac{(hh_0)^{1/2}}{2\pi^2(h+h_0)}\right)^{n/2} & e^{\frac{i}{h+h_0}(pqh_0 - p_0q_0h - ph_0q_0 + p_0hq)} \\ & \times e^{-\frac{1}{2}\frac{hh_0}{h+h_0}|q-q_0|^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{|p-p_0|^2}{h+h_0}}\end{aligned}$$

On constate que la transformée en paquets d'onde d'un paquet d'onde localisé autour de q_0 en temps et p_0 en fréquence est elle-même localisée, autour de (p_0, q_0). En revanche, $W^h(\phi^{h_0}_{p_0,q_0})$ est un peu moins bien localisée que $\phi^h_{p,q}$ et $\phi^{h_0}_{p_0,q_0}$.

4 Diagonalisation approximative des opérateurs différentiels

Pour toute fonction $a : (p,q) \in \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$, on note M_a l'opérateur suivant

$$M_a : F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}) \to aF \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}).$$

On définit, pour tout $s \in \mathbb{R}^+$

$$H^s = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ tq } (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

et on note, pour toute $f \in H^s$,

$$||f||_{H^s} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2}.$$

Lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et que $s < 0$, on définit $||f||_{H^s}$ de la même manière.

4.1 Opérateurs de dérivation

Théorème 4.1. *Soit $h > 0$ quelconque. Soit α un multi-indice. On note D^α l'opérateur de dérivation α-ième. Alors*

$$D^\alpha = W^{h*} M_{(ip)^\alpha} W^h + R$$

où R est un opérateur continu de $H^{|\alpha|}$ vers H^1.

Ici, $M_{(ip)^\alpha}$ est un abus de notation pour $M_{(p,q)\to(ip)^\alpha}$.

Remarque 4.2. *Le théorème ne garantit pas que le reste R est petit au sens de la norme. En revanche, il dit que R est plus régulier que D^α et $W^{h*}M_{(ip)^\alpha}W^h$: ces deux derniers opérateurs associent à une fonction $f \in H^{|\alpha|}$ un élément de L^2, tandis que R associe à $f \in H^{|\alpha|}$ une fonction de H^1.*

Remarque 4.3. *À lui seul, ce théorème n'est pas très intéressant, puisque D^α est déjà diagonalisé par un opérateur plus simple que W^h : la transformée de Fourier (et la diagonalisation est alors exacte : $R = 0$). Le phénomène intéressant est que, comme nous allons le voir, W^h diagonalise (approximativement) simultanément les opérateurs de dérivation et d'autres familles d'opérateurs qui, eux, ne sont pas diagonalisés par la transformée de Fourier.*

Démonstration. Soit $f \in H^{|\alpha|}$ quelconque.

D'après la définition de la transformée en paquets d'ondes, pour tous p, q,

$$\begin{aligned}(ip)^\alpha W^h f(p,q) &= (ip)^\alpha e^{ipq}\mathcal{F}(f\phi_{0,q})(p) \\ &= e^{ipq}\mathcal{F}\left((f\phi_{0,q})^{(\alpha)}\right)(p)\end{aligned}$$

On développe $(f\phi_{0,q})^{(\alpha)}$ par la formule de Leibniz :

$$(f\phi_{0,q})^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}\phi_{0,q} + \sum_{\beta<\alpha} c_\beta f^{(\beta)}\phi_{0,q}^{(\alpha-\beta)}$$

pour certains entiers naturels c_β.

Cela implique

$$\begin{aligned}(ip)^\alpha W^h f(p,q) &= e^{ipq}\mathcal{F}((f^{(\alpha)})\phi_{0,q})(p) + e^{ipq}\sum_{\beta<\alpha} c_\beta \mathcal{F}(f^{(\beta)}\phi_{0,q}^{(\alpha-\beta)})(p) \\ &= W^h(f^{(\alpha)})(p,q) + e^{ipq}\sum_{\beta<\alpha} c_\beta \mathcal{F}(f^{(\beta)}\phi_{0,q}^{(\alpha-\beta)})(p)\end{aligned}$$

Donc

$$(M_{(ip)^\alpha}W^h - W^h D^\alpha)(f)(p,q) = e^{ipq}\sum_{\beta<\alpha} c_\beta \mathcal{F}(f^{(\beta)}\phi_{0,q}^{(\alpha-\beta)})(p)$$

et, puisque $W^{h*}M_{(ip)^\alpha}W^h - D^\alpha = W^{h*}(M_{(ip)^\alpha}W^h - W^h D^\alpha)$, il suffit de montrer que, pour tout $\beta < \alpha$, l'application suivante est continue de $H^{|\alpha|}$ vers H^1 :

$$G_\beta : f \quad \to \quad W^{h*}\Big((p,q) \to e^{ipq}\mathcal{F}(f^{(\beta)}\phi_{0,q}^{(\alpha-\beta)})(p)\Big).$$

Pour toute $f \in H^{|\alpha|}$, d'après le lemme 4.4 (énoncé et démontré plus loin),

$$\begin{aligned}||G_\beta(f)||_{H^1} &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{2n}}(1+|p|^2)|\mathcal{F}(f^{(\beta)}\phi_{0,q}^{(\alpha-\beta)})(p)|^2 dpdq\right)^{1/2} \\ &= C\left(\int_{\mathbb{R}^n}||f^{(\beta)}\phi_{0,q}^{(\alpha-\beta)}||_{H^1}^2 dq\right)^{1/2} \\ &\leq C'\left(\int_{\mathbb{R}^n}||f^{(\beta)}\phi_{0,q}^{(\alpha-\beta)}||_2^2 + \sum_{i=1}^n\Big(||\partial_i f^{(\beta)}\phi_{0,q}^{(\alpha-\beta)}||_2^2 + ||f^{(\beta)}\partial_i\phi_{0,q}^{(\alpha-\beta)}||_2^2\Big)\,dq\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Pour toute fonction $g \in L^2$ et tout multi-indice γ, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}||g\phi_{0,q}^{(\gamma)}||_2^2 dq &= \int_{\mathbb{R}^n}|g(t)|^2\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi_{0,q}^{(\gamma)}(t)|^2 dq\right)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|g(t)|^2\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi_{0,0}^{(\gamma)}(t-q)|^2 dq\right)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|g(t)|^2\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi_{0,0}^{(\gamma)}(q)|^2 dq\right)dt \\ &= C_\gamma||g||_2^2,\end{aligned}$$

où C_γ est une constante qui ne dépend que de $\phi_{0,0}$ et de γ.

Cela entraîne que, pour des constantes D_β et D'_β ne dépendant pas de f,

$$\begin{aligned}
||G_\beta(f)||_{H^1} &\leq D_\beta \left(||f^{(\beta)}||_2^2 + \sum_{i=1}^n ||\partial_i f^{(\beta)}||_2^2 \right)^{1/2} \\
&\leq D'_\beta ||f||_{H^{|\beta|+1}} \\
&\leq D'_\beta ||f||_{H^{|\alpha|}}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu. □

Lemme 4.4. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute $F \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$,*

$$||W^{h*}F||_{H^1} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} (1+|p|^2)|F(p,q)|^2 dpdq \right)^{1/2}$$

Démonstration. Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|W^h f(p,q)|^2}{1+|p|^2} dpdq &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|p|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W^h f(p,q)|^2 dq \right) dp \\
&= \left(\frac{1}{4\pi^3 h} \right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{1}{1+|p|^2} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-\frac{1}{h}|\xi-p|^2} d\xi dp \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \lambda(\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

si on pose

$$\lambda(\xi) = \left(\frac{1}{4\pi^3 h} \right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{1}{1+|p|^2} e^{-\frac{1}{h}|\xi-p|^2} dp.$$

En étudiant cette dernière intégrale, on voit que $\lambda = O(|\xi|^{-2})$ lorsque $|\xi| \to +\infty$. Il existe donc $D > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$0 \leq \lambda(\xi) \leq \frac{D}{1+|\xi|^2}$$

et on a alors, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|W^h f(p,q)|^2}{1+|p|^2} dpdq \leq D||f||_{H^{-1}}^2.$$

Soit maintenant F dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ telle que $\int_{\mathbb{R}^{2n}}(1+|p|^2)|F(p,q)|^2 dpdq < +\infty$. Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
|\langle f\,, W^{h*}F\rangle| &= |\langle W^h f\,, F\rangle| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^{2n}} W^h f(p,q)F(p,q)dpdq\right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|W^h f(p,q)|^2}{1+|p|^2}dpdq\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}}(1+|p|^2)|F(p,q)|^2 dpdq\right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{D}||f||_{H^{-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{2n}}(1+|p|^2)|F(p,q)|^2 dpdq\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Puisque cette inégalité est vraie pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on doit avoir $W^{h^*}F \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et, pour une constante C qui dépend de D,

$$||W^{h*}f||_{H^1} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{2n}}(1+|p|^2)|F(p,q)|^2 dpdq\right)^{1/2}.$$

$\square$

4.2 Opérateurs de multiplication en temps

Théorème 4.5. *Soit $h \geq 1$. Soit $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ une fonction bornée dont toutes les dérivées sont bornées. Alors il existe une constante C_a ne dépendant que de a telle que, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,*

$$\Big(Supp(\hat{f}) \subset B_{\mathbb{R}^n}(0,h)\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(||W^{h*}M_{\tilde{a}}W^h(f) - af||_{H^1} \leq C_a||f||_2\Big),$$

où l'on a noté $\tilde{a}$ la fonction $\tilde{a}:(p,q)\to a(q)$.

Démonstration. Admis. $\square$

Ce théorème est moins bon que le théorème 4.1 à cause de l'hypothèse sur le support de $\hat{f}$. Afin de pouvoir l'appliquer à des fonctions f dont la transformée de Fourier n'est pas à support compact, on introduit la notion de décomposition dyadique.

Proposition 4.6. *Il existe des fonctions $\chi_0, \chi_1 : \mathbb{R}^n \to [0;1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telles que*

$$Supp(\chi_0) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,1),$$
$$Supp(\chi_1) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,2) - B_{\mathbb{R}^n}(0,1/2)$$

et, si on pose, pour tout $j \geq 1$, $\chi_j : x \to \chi_1(2^{1-j}x)$, on a

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \chi_j = 1.$$

La somme est bien définie puisqu'en chaque point, seul un nombre fini de termes de la somme sont non-nuls.

Démonstration. En exercice. $\square$

Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on note

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad f_j = \mathcal{F}^{-1}(\chi_j \mathcal{F} f).$$

On a alors l'égalité $f = \sum_{j=0}^{+\infty} f_j$ (où la somme infinie converge dans $L^2(\mathbb{R}^n)$).

Théorème 4.7. *Soit a comme dans le théorème précédent. On note A l'opérateur de multiplication $A : f \in L^2(\mathbb{R}^n) \to af \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on définit $\tilde{a}_j : (p,q) \to a(q)\chi_j(p)$. Alors

$$A = \sum_{j=0}^{+\infty} W^{2^j *} M_{\tilde{a}_j} W^{2^j} + R$$

où R est un opérateur continu de L^2 vers H^1.

4.3 Diagonalisation des opérateurs différentiels

Théorème 4.8. *Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour tout multi-indice $s \in \mathbb{N}^n$ tel que $|s| \leq d$, soit $a_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées sont bornées. On note S l'opérateur différentiel suivant*

$$S : f \in H^d(\mathbb{R}^n) \to \left(\sum_{|s| \leq d} a_s f^{(s)} \right) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

On pose $\tilde{a} : (p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \sum_{|s|\leq d} a_s(q)(ip)^s$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on définit $\tilde{a}_j : (p,q) \to \tilde{a}(p,q)\chi_j(p)$. Alors

$$S = \sum_{j=0}^{+\infty} W^{2^j *} M_{\tilde{a}_j} W^{2^j} + R,$$

où R est un opérateur continu de H^d vers H^1.

Démonstration. Admis. □

Remarque 4.9. *Ce théorème est vrai pour une classe d'opérateurs plus générale que les opérateurs différentiels. Il s'agit des opérateurs pseudo-différentiels, dont on verra la définition dans la suite du cours.*

4.4 Transformée de Fourier-Bros-Iagolnitzer

Définition 4.10. *Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on définit la transformée FBI de f par*

$$Qf(p,q,h) = W^h f(p,q) = \langle f \,,\, \phi^h_{p,q} \rangle$$

et on note $Q_1 : f \to Qf(p,q,|p|)$.

La transformée FBI diagonalise de manière approximative les opérateurs différentiels, d'une manière très similaire à celle décrite au théorème 4.8 mais plus élégante à énoncer.

Théorème 4.11. *Soit S un opérateur différentiel comme dans le théorème 4.8. On définit toujours $\tilde{a} : (p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \sum_{|s| \leq d} a_s(q)(iq)^s$. Alors*

$$S = Q_1^* M_{\tilde{a}} Q_1 + R,$$

où R est un opérateur continu de H^d vers H^1.

Démonstration. Admis. □

En plus d'avoir de bonnes propriétés de diagonalisation, la transformée FBI facilite l'étude des propriétés de régularité locale des fonctions. À titre d'exemple, on a le théorème suivant :

Théorème 4.12. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors f est analytique au voisinage de x_0 si et seulement s'il existe un voisinage U de x_0 et des constantes $C, \epsilon, K > 0$ telles que*

$$\forall q \in U, t > 0, |p| \geq K \qquad |Q(tp,q,t)| \leq Ce^{-\epsilon t}.$$

Démonstration. Admis. □