École Normale Supérieure
17 septembre 2015

Analyse des équations aux dérivées partielles

TD n$^{\text{o}}$1 : révisions

Exercice 1 : théorème de Hahn-Banach

On admet la « forme analytique » du théorème de Hahn-Banach :
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Soit $p : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \qquad p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

Si $l : F \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire telle que $l(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$, alors il existe $\tilde{l} : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que :

$$\forall x \in F, \quad l(x) = \tilde{l}(x) \qquad \text{et} \qquad \forall y \in E, \quad l(y) \leq p(y)$$

1. Soit E un espace vectoriel normé réel. Soient $A, B \subset E$ deux ouverts convexes disjoints de E. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue non-nulle $f : E \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{x \in B} f(x)$$

[Indication : poser $C = A - B$, puis $p(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^+C$ et $p(x) = +\infty$ si $x \in E - \mathbb{R}^+C$.]

2. Montrer que, si, au lieu d'être ouverts, A et B sont fermés et au moins l'un des deux ensembles est compact, alors l'inégalité large peut être remplacée par une inégalité stricte.

Exercice 2 : théorème de représentation de Riesz

1. Énoncer le théorème de représentation de Riesz (ou de Riesz-Fréchet).

2. [Théorème de Lax-Milgram]
Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue vérifiant la propriété suivante :

$$\exists c > 0 \text{ tq } \forall x \in H \qquad a(x,x) \geq c||x||^2$$

Montrer que, pour toute forme linéaire continue $\phi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$\forall v \in H \qquad a(u,v) = \phi(v)$$

[Indication : écrire a sous la forme $a(.,.) = \langle A.,.\rangle$.]

Exercice 3 : convergence faible dans les espaces de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert.

1. Montrer que, si H est séparable, il admet une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
[On rappelle que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne si et seulement si tout élément $x \in H$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$, avec $||x||^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$.]

2. Montrer que, si H est séparable, toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bornée d'éléments de H admet une sous-suite qui converge faiblement dans H.
[On rappelle qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers une limite x_∞ dans un espace de Banach E si et seulement si, pour toute forme linéaire continue $\phi \in E'$, on a $\phi(x_k) \overset{k\to+\infty}{\to} \phi(x_\infty)$.]
3. Montrer que le résultat précédent reste vrai même si H n'est plus supposé séparable.

Exercice 4 : distributions

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on appelle *semi-norme* une fonction $p : E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall x, y \in E, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

1. [Topologie définie par une famille de semi-normes]
a) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\{p_i\}_{i\in I}$ une famille de semi-normes sur E. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des parties U de E telles que, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ et $i_1, ..., i_n$ un nombre fini d'éléments de I vérifiant :

$$\{x' \in E \text{ tq } \forall k, p_{i_k}(x - x') < r\} \subset U$$

Montrer que $\mathcal{U}$ est une topologie. C'est la *topologie définie par la famille de semi-normes* $\{p_i\}_{i\in I}$.
b) Montrer que, pour cette topologie, les applications suivantes sont continues :

$$(x, y) \in E \times E \to x + y \qquad (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \to \lambda x$$

On dit que E est un *espace vectoriel topologique*.
c) On suppose que, pour tout $x \in E - \{0\}$, il existe $i \in I$ tel que $p_i(x) \neq 0$. Montrer que la topologie de la question a) est séparée.
d) Soit q une semi-norme sur E. Montrer que q est continue pour la topologie définie par $\{p_i\}_{i\in I}$ si et seulement s'il existe $C > 0$ et $i_1, ..., i_n \in I$ vérifiant :

$$q \leq C \sup_{1\leq k\leq n} p_{i_k}$$

e) Montrer qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers une limite x_∞ si et seulement si $p(x_k - x) \to 0$ pour toute semi-norme continue p.
2. Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$ (pour un certain $n \geq 1$), on note $\mathcal{D}_K$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact inclus dans K.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit une semi-norme $p_{m,K}$ par :

$$\forall f \in \mathcal{D}_K \qquad p_{m,K}(f) = \sup_{x\in K, |\alpha|\leq m} |\partial^\alpha f(x)|$$

On munit $\mathcal{D}_K$ de la topologie engendrée par la famille de semi-normes $\{p_{m,k}\}_{m\in\mathbb{N}}$.
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $K_i = [-i; i]^n$. On note :

$$\mathcal{P} = \{p \text{ semi-norme sur } \mathcal{D} \text{ tq } \forall i \in \mathbb{N}^*, p_{|\mathcal{D}_{K_i}} \text{ est continue}\}$$

On munit $\mathcal{D}$ de la topologie engendrée par la famille de semi-normes $\mathcal{P}$.
a) Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{D}$. Montrer que cette suite converge dans $\mathcal{D}$ vers une limite f_∞ si et seulement s'il existe $i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, f_k \in \mathcal{D}_{K_i} \qquad \text{et} \qquad f_k \to f_\infty \text{ dans } \mathcal{D}_{K_i}$$

b) Montrer que la topologie de $\mathcal{D}$ n'est pas métrisable.
3. Une *distribution* est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{D}'$ l'espace des distributions. Montrer qu'une forme linéaire $L : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une distribution si et seulement si, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall f \in \mathcal{D} \text{ tq } \mathrm{Supp}(f) \subset K, \qquad |L(f)| \leq C p_{m,K}(f)$$

Exercice 5 : espace de Schwartz et distributions tempérées
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On appelle espace de Schwartz l'ensemble suivant :

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \text{ tq } \forall k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^d, \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^k)|\partial^\alpha f(x)| < +\infty \right\}$$

Pour tous $k, m \in \mathbb{N}$, on définit une semi-norme $p_{k,m}$ sur $\mathcal{S}$ par :

$$p_{k,m}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\leq m} (1 + ||x||^k)|\partial^\alpha f(x)|$$

et on munit $\mathcal{S}$ de la topologie engendrée par la famille de semi-normes $\{p_{k,m}\}_{k,m\in\mathbb{N}}$. On note $\mathcal{S}'$ l'ensemble des *distributions tempérées*, c'est-à-dire des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}$.
1. a) Montrer qu'une forme linéaire $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ est une distribution tempérée si et seulement s'il existe $C > 0$ et $k, m \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall f \in \mathcal{S} \qquad |T(f)| \leq C p_{m,k}(f)$$

b) Donner un exemple de distribution $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ qui ne se prolonge pas en une distribution tempérée $\tilde{T} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.
2. On définit la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{S}$ par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} f(x) d^n x$$

On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction de Schwartz est toujours de Schwartz.
a) Pour toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'$, on définit $\mathcal{F}T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{F}T(f) = T(\mathcal{F}(f))$$

Montrer que $\mathcal{F}T$ est une distribution tempérée.
b) Quelle est la transformée de Fourier du dirac en 0 (c'est-à-dire de la distribution $f \to f(0)$) ?
c) Si g appartient à $\mathcal{S}$, quelle est la transformée de Fourier de $T_g : f \to \int_{\mathbb{R}} fg$?

Exercice 6 : formule de Green

Soit $n \geq 2$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. On suppose que, pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et un voisinage $\mathcal{U}$ de 0, ainsi qu'un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ vérifiant :

$$\phi(\mathcal{U} \cap (\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}^{n-1})) = \mathcal{V} \cap \Omega$$

On note alors $n(x_0)$ la *normale* à $\partial\Omega$ en x_0, c'est-à-dire le vecteur unitaire orthogonal à $d\phi_0(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ dont le produit scalaire avec $d\phi_0(1, 0, ...)$ est positif.

Si $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ est à support inclus dans un ouvert $\mathcal{V}$ comme précédemment, on définit l'intégrale de f sur $\partial\Omega$ par :

$$\int_{\partial\Omega} f \, dS = \int_{\tilde{\mathcal{U}}} f \circ \tilde{\phi}(x) \, |\det(d\tilde{\phi}(x))| \, dx$$

où $\tilde{\mathcal{U}} = \{(x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ tq } (0, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{U}\}$ et $\tilde{\phi}(x) = \phi(0, x)$ pour tout $x \in \tilde{\mathcal{U}}$.

Si $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ est nulle sur $\partial\Omega$, on définit :

$$\int_{\partial\Omega} f \, dS = 0$$

Enfin, si $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ n'est dans aucune de ces deux situations, on définit l'intégrale par :

$$\int_{\partial\Omega} f \, dS = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\Omega} (\phi_i f) \, dS$$

où les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ ϕ_i sont choisies de telle sorte que $\sum_{i=1}^N \phi_i = 1$ et, pour tout i, le support de ϕ_i est d'intersection vide avec $\partial\Omega$ ou bien est inclus dans un ouvert $\mathcal{V}$ de la forme précédente.

1. Soit $f : \overline{C} \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$\int_{\Omega} \text{div}(f) \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle f, n \rangle \, dS$$

2. On suppose que $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ sont respectivement $\mathcal{C}^2$ et $\mathcal{C}^1$. Démontrer la formule de Green :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS = \int_{\Omega} (\Delta u) v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx \qquad \text{avec } \partial u / \partial n = \langle \nabla u, n \rangle$$

Exercice 7 : énergie de Dirichlet

Soient Ω un ouvert borné de bord régulier. On considère $Q : \gamma \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \to Q_\gamma$, où :

$$Q_\gamma : f \in H^{1/2}(\partial\Omega) \to \int_{\Omega} \gamma |\nabla u|^2 \, dx$$

avec u solution dans $H^1(\Omega)$ de :

$$\begin{cases} \text{div}(\gamma \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = f \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Montrer que, pour toute f :

$$dQ_{|\gamma=1}(h)(f) = \int_{\Omega} h |\nabla v|^2 \, dx$$

où v est solution de :

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ dans } \Omega \\ v = f \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$