# TD n$^{\text{o}}$10 : principe du maximum et propagation des singularités

**Exercice 1 : principe du maximum**

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

1. Soit $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction de dérivée bornée telle que $G(0) = 0$.

a) Montrer que, pour toute $u \in H^1(\Omega)$, $G \circ u \in L^2(\Omega)$.

b) Montrer que $G \circ u \in H^1(\Omega)$ et que, pour tout $j \leq n$ :

$$\partial_j (G \circ u) = (G' \circ u) \partial_j u$$

[Indication : considérer une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$ et telle que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $u$, presque partout sur $\Omega$.]

2. On considère l'opérateur suivant :

$$L(u) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_i (a_{ij} \partial_j u)$$

où les $a_{ij}$ sont des fonctions de $L^\infty(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant :

$$\forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \qquad \lambda ||\xi||^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$$

Pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on dit que $Lu = 0$ au sens faible si :

$$\forall \phi \in H^1_0(\Omega), \qquad \sum_{1 \leq i,j \leq n} \int a_{ij}(x) (\partial_j u(x)) (\partial_i \phi(x)) dx = 0$$

On va démontrer le principe du maximum : si $u \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est telle que $Lu = 0$ au sens faible et $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq 0$ sur tout $\Omega$.

a) Montrer qu'il existe $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ une fonction de dérivée bornée telle que $G' > 0$ sur $]0; +\infty[$ et $G = 0$ sur $] - \infty; 0]$.

b) En considérant $\langle Lu, G \circ u \rangle$, montrer que $\int_\Omega ||\nabla u||^2 G'(u) \leq 0$.

c) Conclure.

[Remarque : l'hypothèse $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est superflue. La démonstration reste valable si on suppose seulement que $u$ appartient à $H^1(\Omega)$ et que sa trace sur $\partial\Omega$ est négative.]

**Exercice 2 : propagation des singularités**

Soit $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ un symbole d'ordre $m$, avec $m \geq 1$. On note $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ son symbole principal, dont on suppose qu'il est à valeurs réelles.

On appelle *courbe bicaractéristique de* $p$ l'image de la solution maximale d'une équation de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \nabla_\xi p(x,\xi) & \qquad \frac{d\xi}{dt} &= -\nabla_x p(x,\xi) \\ x(0) &= x_0 & \xi(0) &= \xi_0 \end{aligned} \tag{1}$$

où $(x_0,\xi_0)$ est tel que $p(x_0,\xi_0)=0$.
On notera $\xi\in\mathbb{R}^n\to\langle\xi\rangle\in\mathbb{R}$ une fonction légèrement différente de d'habitude : on supposera $\langle\xi\rangle\geq 1$ pour tout $\xi$ et $\xi\to\langle\xi\rangle$ homogène de degré 1 en-dehors de $B(0,1)$.

1. Montrer que les courbes bicaractéristiques de $p$ sont incluses dans $p^{-1}(\{0\})$.

Soit $u\in\mathcal{S}'$ telle que $\mathrm{Op}(a)u=0$. On va montrer que $WF(u)$ est une union de courbes bicaractéristiques de $p$.

2. a) Soit $(x_0,\xi_0)\in WF(u)$. On rappelle que, par le théorème de Sato-Hörmander, on a alors $p(x_0,\xi_0)=0$.
Soit $(x(t),\xi(t))$ la solution de (1) associée. On va montrer que, pour tout $t$ assez proche de 0, $(x(t),\xi(t))\in WF(u)$. Montrer que cela suffit pour démontrer le résultat annoncé.
[Indication : utiliser un argument de connexité.]
b) Montrer qu'il suffit de démontrer ce résultat pour $||\xi_0||\geq 4$.
[Indication : utiliser l'homogénéité de $p$.]

3. On suppose toujours $(x_0,\xi_0)\in WF(u)$. Soit $\psi\in\mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\psi=1$ au voisinage de $x_0$.
a) Montrer que $\mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{m-1})(\psi u)$ a le même front d'onde que $u$ au voisinage de $(x_0,\xi_0)$.
[Indication : commencer par montrer que $\psi u$ et $u$ ont le même front d'onde au voisinage de $(x_0,\xi_0)$ ; utiliser ensuite la caractérisation du front d'onde qui fait l'objet de l'exercice 3.]
b) On pose :

$$v=\mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{m-1})(\psi u)$$

Soit $\phi\in\mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\phi=1$ au voisinage de $x_0$ et $\psi=1$ au voisinage de $\mathrm{Supp}(\phi)$. Soit $b\in S^{+\infty}$ tel que $\mathrm{Op}(b)=\mathrm{Op}(\phi(x))\,\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{1-m})$. Montrer que $\mathrm{Op}(b)v$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.
c) Montrer que $b$ appartient à $S^1$ et que, si on pose $q(x,\xi)=\phi(x)p(x,\xi)\,\langle\xi\rangle^{1-m}$, $b(x,\xi)-q(x,\xi)$ appartient à $S^0$.
d) Montrer que $q$ et $p$ ont les mêmes courbes bicaractéristiques au voisinage de $(x_0,\xi_0)$, à reparamétrisation près.
[Indication : utiliser la question 1.]

4. Soit $c_0\in S^0$ quelconque. En reprenant l'exercice 3 du TD 9, montrer qu'il existe $c\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},S^0)$ telle que :

1. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}\mathrm{Op}(c(t,.,.))+i[\mathrm{Op}(b),\mathrm{Op}(c(t,.,.))]=\mathrm{Op}(r_t)$ avec $r_t\in S^{-\infty}$.
2. $c(0,.,.)=c_0$.
3. Pour tout $t$, $\mathrm{Supp}(c(t,.,.))\subset\mathrm{Supp}(c_0\circ\Phi_q^{-t})$ (où $\Phi_q$ est le flot hamiltonien associé à $q\in S^1$).

5. Soit $(x_0,\xi_0)\in WF(v)$, avec $||\xi_0||\geq 4$. On suppose par l'absurde qu'il existe $s$ arbitrairement proche de 0 tel que $\Phi_q^s(x_0,\xi_0)\notin WF(v)$. On considère un tel $s$ fixé.

a) Montrer qu'il existe $s_0 > 0$ tel que, pour tout $s$ tel que $|s| \leq s_0$, toute solution $t \to (x(t), \xi(t))$ de (1) satisfait, quelles que soient les conditions initiales :

$$||\xi(s) - \xi(0)|| \leq \frac{1}{2}||\xi(0)||$$

b) Montrer que, pour tout $s$ tel que $|s| \leq s_0$, pour tout $(x_1, \xi_1)$ tel que $||\xi_1|| \geq 2$, l'image par $\Phi_q^s$ d'un voisinage conique de $(x_1, \xi_1)$ contient un voisinage conique de $\Phi_q^s(x_1, \xi_1)$, privé éventuellement d'un ensemble borné.
On suppose $|s| \leq s_0$.
c) Montrer que si $c_0$ est à support inclus dans un voisinage conique assez petit de $(x_0, \xi_0)$, alors $\mathrm{Op}(c(s, ., .))v \in H^\infty$.
[Indication : utiliser l'exercice 3.]
Dans les questions d) et e), on suppose le support de $c_0$ inclus dans un tel voisinage conique.
d) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $w(t) = \mathrm{Op}(c(t, ., .))v$. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $w(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, H^\sigma)$.
e) Montrer que $\frac{d}{dt}w(t) + i\,\mathrm{Op}(b)w(t)$ appartient à $H^\infty$ pour tout $t$ (uniformément en $t$). En déduire que $w(0) \in H^\infty$.
f) Montrer que $(x_0, \xi_0) \notin WF(v)$.
[Indication : utiliser l'exercice 3.]
g) En déduire que, pour tout $s$ assez proche de 0, $\Phi_q^s(x_0, \xi_0) \in WF(v)$. Conclure.

**Exercice 3 : une autre caractérisation du front d'onde**

Soient $s \in \mathbb{R}$ et $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. On va montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$.
2. Il existe un voisinage conique $\Gamma$ de $(x_0, \xi_0)$ tel que, pour tout $a \in S^{+\infty}$ tel que $\mathrm{Supp}(a) \subset \Gamma$, $\mathrm{Op}(a)f \in H^\infty$.

1. Montrer (2) $\Rightarrow$ (1).

2. Réciproquement, soit $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$.

a) Montrer qu'il existe $a \in S^0$ vérifiant les deux propriétés suivantes :
- $\mathrm{Op}(a)f \in H^\infty$.
- Il existe un voisinage conique $\Gamma$ de $(x_0, \xi_0)$ et $R > 0$ tels que :

$$\forall (x, \xi) \in \Gamma \text{ tq } ||\xi|| \geq R, \qquad |a(x, \xi)| \geq 1$$

b) Soient $a, \Gamma$ comme précédemment. Soit $\Gamma'$ un voisinage conique ouvert de $(x_0, \xi_0)$ tel que $\overline{\Gamma}' \subset \mathring{\Gamma}$.
Soit $b \in S^{+\infty}$ tel que $\mathrm{Supp}(b) \subset \Gamma'$. Montrer qu'il existe $c \in S^{+\infty}$ tel que :

$$\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(c)\,\mathrm{Op}(a) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$$

c) Conclure.