TD n°11

Exercice 1 : estimation des dérivées d'une fonction harmonique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ une fonction harmonique dans Ω.

1. Montrer que si $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$, alors, pour tout $j = 1, ..., n$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{\partial B(x_0,r)} u(y)\nu_j(y)dy$$

où ν_j est la j-ième coordonnée du vecteur normal unitaire à $\partial B(x_0, r)$.

2. On suppose que $m \leq u \leq M$ sur $\partial B(x_0, r)$ pour deux constantes m et M. Montrer que :

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)\right| \leq C_n \frac{M-m}{r}$$

où C_n est une constante qui dépend de la dimension.

3. En déduire que si $m \leq u \leq M$ sur Ω, alors :

$$\forall x \in \Omega, \qquad ||\nabla u(x)|| \leq C'_n \frac{M-m}{d(x, \partial\Omega)}$$

4. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions harmoniques dans Ω qui est uniformément bornée, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément, ainsi que ses dérivées, sur tout compact de Ω, vers une fonction harmonique dans Ω.

Exercice 2 : généralisation de l'inégalité de Cacciopoli

Soient $A = (a_{ij}(x)) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ une fonction à valeurs matricielles et $\alpha > 0$ tels que :

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \alpha||\xi||^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

Soient $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur linéaire défini par :

$$\begin{aligned} Lu &= -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + b(x).\nabla u + c(x)u \\ &= -\sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u) + \sum_{i=1}^d b_i(x)\partial_{x_i}u + c(x)u \end{aligned}$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ telles que $Lu = f$ au sens des distributions. Soit $\Omega' \subset \Omega$ un ouvert borné tel que $\overline{\Omega}' \subset \Omega$. Montrer que :

$$\int_{\Omega'} ||\nabla u||^2 dx \leq C \int_\Omega (u^2 + f^2)dx$$

[Indication : on pourra utiliser comme fonction test $\eta^2 u$ où $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et vaut 1 sur Ω'.]

Exercice 3 : équation des ondes

Soient $u_0, u_1 \in \mathcal{S}'$ deux distributions tempérées. On considère l'équation des ondes :

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = 0$$
$$u(0) = u_0 \qquad \partial_t u(0) = u_1$$

1. [Existence et unicité de la solution]
a) On définit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad C(t,\xi) = \cos(t||\xi||) \qquad \text{et} \qquad S(t,\xi) = \frac{\sin(t||\xi||)}{||\xi||}$$

Montrer que C et S sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, dont les dérivées à tout ordre (en t et ξ) sont à croissance au plus polynomiale en $||\xi||$ à t fixé.
b) Montrer que $t \to \mathcal{F}^{-1}(C(t,.)\hat{u}_0 + S(t,.)\hat{u}_1)$ est solution de l'équation.
[La transformée de Fourier désigne systématiquement la transformée au sens des distributions.]
c) Montrer qu'il s'agit de l'unique solution.
[Indication : montrer que, si u est solution, alors, pour tout t, $U : s \to C(t-s,.)\hat{u}(s) + S(t-s,.)\partial_t\hat{u}(s)$ est une fonction constante.]

2. À partir de maintenant, on suppose qu'on est en dimension $n = 3$. À l'exception de la question a), le raisonnement est néanmoins général.
a) On définit, pour tout $t > 0$, deux distributions tempérées :

$$D_S(t) : f \in \mathcal{S} \to \frac{1}{t}\int_{\partial B(0,t)} f(x)d\sigma(x)$$
$$D_C(t) : f \in \mathcal{S} \to \frac{1}{t^2}\int_{\partial B(0,t)} f(x)d\sigma(x) + \frac{1}{t}\int_{B(0,t)} \Delta f(x)dx$$

Montrer que $\mathcal{F}(D_S(t)) = 4\pi S(t,.)$ et $\mathcal{F}(D_C(t)) = 4\pi C(t,.)$.
b) Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Soient $u_0, \tilde{u}_0, u_1, \tilde{u}_1$ quatre distributions tempérées. On suppose que les restrictions de u_0 et $\tilde{u}_0$ à $B(x_0, r)$ coïncident, ainsi que celles de u_1 et $\tilde{u}_1$.
On note u et $\tilde{u}$ les solutions de l'équation des ondes, respectivement pour les conditions initiales (u_0, u_1) et $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$.
Montrer que, pour tout $t \in]-r; r[$, les restrictions à $B(x_0, r - |t|)$ de u et $\tilde{u}$ coïncident.

3. On note $U : (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \to u(t)(x)$. Montrer que, si $(x,\xi) \notin WF(u_0) \cup WF(u_1)$, alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $((0,x),(y,\xi)) \notin WF(U)$.

4. a) Montrer que $WF(U) \subset \{((t,x),(||\xi||,\xi)), t \in \mathbb{R}, x, \xi \in \mathbb{R}^n\} \cup \{((t,x),(-||\xi||,\xi)), t \in \mathbb{R}, x, \xi \in \mathbb{R}^n\}$.
b) Montrer que si $(x,\xi) \in WF(u_0)$ ou $(x,\xi) \in WF(u_1)$, alors $((0,x),(||\xi||,\xi)) \in WF(U)$ ou $((0,x),(-||\xi||,\xi)) \in WF(U)$.

5. Pour tout t, montrer que si $(x,\xi) \in WF(u(t))$, alors $(x - t\xi/||\xi||, \xi) \in WF(u_0) \cup WF(u_1)$ ou $(x + t\xi/||\xi||, \xi) \in WF(u_0) \cup WF(u_1)$.
[Indication : utiliser le théorème de propagation des singularités du TD 10.]