École Normale Supérieure
17 décembre 2015

Analyse des équations aux dérivées partielles

TD n$^{\text{o}}$12 : Campanato et De Giorgi

Dans tout le TD, si A est un ensemble borélien, on note $|A|$ sa mesure de Lebesgue.

Exercice 1 : théorème de différentiation de Lebesgue

1. Soient Ω l'union d'une famille $\mathcal{B}$ de boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$ et $c < |\Omega|$. Montrer qu'il existe une suite finie $B_1, ..., B_k$ de boules disjointes de $\mathcal{B}$ telle que :

$$c < 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_j|$$

C'est le lemme de recouvrement de Vitali.
Pour toute fonction mesurable f appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et tout $r > 0$, on pose :

$$M_r f(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy$$

La fonction maximale associée à f est définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$Mf(x) = \sup_{r>0} M_r|f|(x)$$

2. Montrer que, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$[Mf]_1 \leq 3^n ||f||_{L^1}$$

où on a noté $[u]_1 = \sup_{\lambda \geq 0} \lambda |\{x \text{ tq } |u(x)| \geq \lambda\}|$.
[Indication : on pourra utiliser le recouvrement de Vitali sur $S = \{x \text{ tq } M|f| > \lambda\}$.]
3. Montrer que pour toute fonction mesurable $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{r \to 0^+} M_r f(x) = f(x)$$

[Indication : on pourra commencer par le cas où $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$.]

Exercice 2 : injection de Sobolev

Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. On note :

$$u_{x,r} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u$$

1. Montrer que :

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u_{x,r}|^p dy \leq C r^p \int_{B(x,r)} ||\nabla u||^p$$

où C est une constante indépendente de x et r.
[Indication : utiliser l'inégalité de Poincaré-Sobolev.]

2. En utilisant le théorème de Campanato, en déduire que si Ω est un ouvert à bord régulier et si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ avec $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

Exercice 3 : théorème de De Giorgi

Soit $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une famille d'éléments de $L^\infty(B(0,2), \mathbb{R})$ telle que, pour un certain $\lambda > 0$:

$$\forall x, \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \lambda ||\xi||^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$$

On note $L : u \to \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j u)$ et on suppose que $Lu = 0$ pour une certaine fonction $u \in H^1(B(0,2))$.

On rappelle le résultat suivant, vu en cours :

Théorème 3.1. *Si $\overline{B(x_0,r)} \subset B(x_0,\rho) \subset B(0,2)$, alors il existe $c > 0$ tel que, pour toute sous-solution positive $v \in H^1(B(0,2))$ de L :*

$$\sup_{B(x_0,r)} v \leq c \left(\int_{B(x_0,\rho)} v^2 \right)^{1/2}$$
$$\left(\int_{B(x_0,r)} ||\nabla v||^2 \right)^{1/2} \leq c \left(\int_{B(x_0,\rho)} v^2 \right)^{1/2}$$

Le but de l'exercice est de donner du théorème suivant une démonstration différente de celle du cours.

Théorème 3.2. *Il existe $\alpha > 0$ indépendante de u telle que u est α-Hölder sur $B(0,1)$.*

On va pour cela démontrer le lemme :

Lemme 3.3. *Il existe $\sigma \in]0;1[$ indépendante de u telle que, pour tout $x_0 \in B(0,1)$ et tout $r > 0$ tel que $B(x_0, 4r) \subset B(0,2)$, alors :*

$$\sup_{B(x_0,r)} u - \inf_{B(x_0,r)} u \leq \sigma \left(\sup_{B(x_0,2r)} u - \inf_{B(x_0,2r)} u \right)$$

1. Rappeler pourquoi le lemme entraîne le résultat.

2. Dans cette question, on suppose que $u \in H^1(B(0,1))$ est une fonction qui vérifie l'inégalité suivante, pour un $c_0 > 0$ fixé :

$$\int ||\nabla u||^2 \leq c_0$$

Pour tout $\epsilon \in [0; 1/2[$, on définit :

$$A_\epsilon = u^{-1}(]-\infty; \epsilon]) \quad C_\epsilon = u^{-1}(]\epsilon; 1-\epsilon[) \quad D_\epsilon = u^{-1}([1-\epsilon; +\infty[)$$

On commence par supposer que u est de classe $\mathcal{C}^1$.
a) Soit $x_0 \in A_\epsilon$. Soit $S_{x_0} = \{x \in \partial B(0,1) \text{ tq } [x_0; x[\cap D_\epsilon \neq \emptyset\}$. Montrer que :

$$\int_{S_{x_0}} (1-2\epsilon) d\sigma(x) \leq \int_{S_{x_0}} \int_0^1 ||\nabla u((1-t)x_0 + tx)||\, ||x - x_0|| 1_{(1-t)x_0+tx \in C_\epsilon} dt\, d\sigma(x)$$

b) En déduire :

$$\int_{S_{x_0}} (1-2\epsilon) d\sigma(x) \leq c_n \int_{C_\epsilon} \frac{||\nabla u(y)||}{||x_0 - y||^{n-1}} dy$$

pour une constante c_n ne dépendant que de la dimension n.
c) Montrer qu'il existe $c'_n > 0$ tel que, pour tout $x \in B(0,1)$ et tout $E \subset B(0,1)$:

$$\int_E \frac{dy}{||x-y||^{n-1}} \leq c'_n |E|^{1/n}$$

d) Montrer que $\int_{S_{x_0}} 1 d\sigma(x) \geq c''_n |D_\epsilon|$, où c''_n est une constante qui ne dépend que de la dimension n.
e) Montrer que :

$$|A_\epsilon|\, |D_\epsilon| \leq \frac{c_0^{1/2} c'_n c_n}{(1-2\epsilon) c''_n} |C_\epsilon|^{1/2} |A_\epsilon|^{1/n}$$

f) On ne suppose maintenant plus que u est $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$|A_0|\, |D_0| \leq \frac{c_0^{1/2} c'_n c_n}{c''_n} |C_0|^{1/2} |A_0|^{1/n}$$

3. Soit $u \in H^1(B(0,3/2))$ une sous-solution de $Lu = 0$ (c'est-à-dire qu'on a $Lu \geq 0$). On suppose $0 \leq u \leq 1$. Soit $\mu = |B(0,1) \cap u^{-1}(\{0\})|$. On suppose $\mu > 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k = 2^k \max(0, u - (1 - 2^{-k}))$.
a) Montrer qu'il existe $c_0 > 0$ indépendante de u telle que, pour tout k :

$$\int_{B(0,1)} ||\nabla v_k||^2 \leq c_0$$

b) En appliquant le résultat de la question 2. à la fonction $2\min(v_k, 1/2)$, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0| \geq c\, |\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_{k+1}(x) > 0\}|^2$$

où c est une constante qui ne dépend que de n, μ et c_0.
c) Montrer que, pour tout $\delta > 0$, il existe k_0 ne dépendant que de n, μ, δ et c_0 tel que :

$$|\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_{k_0}(x) > 0\}| \leq \delta$$

d) En déduire qu'il existe $\eta \in]0;1[$ ne dépendant pas de u tel que :

$$\sup_{B(0,1/2)} u \leq \eta$$

[Indication : utiliser le fait que $\int_{B(0,1)} v_{k_0}^2 \leq |\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_{k_0}(x) > 0\}|$.]
4. Démontrer le lemme.