Feuille d'exercices n^{o}12

Corrigé

Exercice 1

1. Par un argument de compacité, quitte à diminuer un peu le volume de Ω en conservant l'inégalité $c < |\Omega|$, on peut supposer que le nombre de boules dans $\mathcal{B}$ est fini : $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_n\}$. En effet, il existe $F \subset \Omega$ un compact tel que $c < |F|$ (propriété de régularité de la mesure de Lebesgue). Par compacité, F est inclus dans l'union d'une sous-famille finie de $\mathcal{B}$.

On choisit une suite $(B_{j_1}, ..., B_{j_s})$ de la manière suivante :

- On choisit pour B_{j_1} une boule de $\mathcal{B}$ de rayon maximal.
- Une fois que $B_{j_1}, ..., B_{j_k}$ ont été choisies, on choisit $B_{j_{k+1}}$ une boule de $\mathcal{B}$ qui est d'intersection vide avec $B_{j_1}, ..., B_{j_k}$ et dont le rayon est maximal. Si une telle boule n'existe pas, on arrête la construction.

Lemme 1.1. *Pour tout k, on note x_k le centre de B_{j_k} et r_k son rayon. Alors :*

$$\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{s} B(x_k, 3r_k)$$

Démonstration. Soit $y \in \Omega$. Montrons que $y \in B(x_k, 3r_k)$ pour un certain k.
Puisque Ω est l'union des B_i, il existe i tel que $y \in B_i$. Si $i = j_k$ pour un certain k, on a $y \in B_{j_k} = B(x_k, r_k) \subset B(x_k, 3r_k)$.
En revanche, si $i \neq j_k$ pour tout k, cela signifie, à cause de la manière dont on a choisi les j_k, que $B_i \cap B_{j_k} \neq \emptyset$ pour au moins une valeur de k. Fixons k le plus petit entier vérifiant cette propriété.
Comme B_i n'intersecte pas $B_{j_1}, ..., B_{j_{k-1}}$, cela entraîne, d'après le processus de construction des j_k, que B_i est de rayon inférieur ou égal à $B_{j_k} = B(x_k, r_k)$. Ainsi, B_i contient un point qui appartient à $B(x_k, r_k)$ et est de diamètre au plus $2r_k$; on a donc $y \in B_i \subset B(x_k, 3r_k)$. $\square$

D'après le lemme, $|\Omega| \leq \sum_{k=1}^{s} |B(x_k, 3r_k)| = 3^n \sum_{k=1}^{s} |B_{j_k}|$. Par construction, les B_{j_k} sont disjointes.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Montrons que $\lambda|\{x \text{ tq } Mf(x) \geq \lambda\}| \leq 3^n ||f||_1$.
Puisque $\lambda|\{x \text{ tq } Mf(x) \geq \lambda\} = \lim_{\lambda' \to \lambda^-} \lambda'|\{x \text{ tq } Mf(x) > \lambda'\}$, on peut se contenter de montrer que $\lambda|\{x \text{ tq } Mf(x) > \lambda\}| \leq 3^n ||f||_1$.
Notons $E = \{x \text{ tq } Mf(x) > \lambda\}$. Pour tout $x \in E$, il existe $r_x > 0$ tel que $\frac{1}{|B(x,r_x)|} \int_{B(x,r_x)} |f(y)| dy > \lambda$.

Posons $\Omega = \bigcup_{x \in E} B(x, r_x)$. Soit $c < |\Omega|$ quelconque. D'après la question 1., il existe $x_1, ..., x_k$ tels que $B(x_1, r_{x_1}), ..., B(x_k, r_{x_k})$ soient disjointes et :

$$c < 3^n \sum_{i=1}^{k} |B(x_i, r_{x_i})|$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f| &\geq \sum_{i=1}^{k} \int_{B(x_i, r_{x_i})} |f| \\ &> \sum_{i=1}^{k} \lambda |B(x_i, r_{x_i})| \\ &> \lambda 3^{-n} c\end{aligned}$$

En faisant tendre c vers $|\Omega|$, on obtient :

$$||f||_1 \geq 3^{-n} \lambda |\Omega| \geq 3^{-n} \lambda |E|$$

c'est-à-dire qu'on a bien montré, comme voulu, $\lambda |E| \leq 3^n ||f||_1$.

3. Commençons par supposer $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Dans ce cas, le résultat est une conséquence de l'uniforme continuité de f :

$$\forall r > 0 \qquad ||M_r f - f||_\infty \leq \sup_{||x-y||<r} |f(x) - f(y)| \to 0 \quad \text{quand } r \to 0$$

Cessons de supposer $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Supposons $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers f dans L^1. Quitte à extraire, on peut supposer que f_k converge simplement vers f.

Pour tout $\lambda > 0$, $|\{x \text{ tq } |M(f - f_k)(x)| \geq \lambda\}| \leq 3^n \lambda^{-1} ||f - f_k||_1$, d'après la question précédente. À part sur un ensemble de mesure au plus $3^n \lambda^{-1} ||f - f_k||_1$, on a donc la propriété suivante :

$$\begin{aligned}\limsup_{r \to 0} |M_r f(x) - f(x)| &\leq \limsup_{r \to 0} |M_r f_k(x) - f_k(x)| + M_r |f - f_k|(x) + |f - f_k|(x) \\ &\leq \lim_{r \to 0} |M_r f_k(x) - f_k(x)| + \sup_{r > 0} M_r |f - f_k|(x) + |f - f_k|(x) \\ &= M|f - f_k|(x) + |f - f_k|(x) \\ &\leq \lambda + |f - f_k|(x)\end{aligned}$$

Quitte à extraire encore, on peut supposer que $\sum_k ||f - f_k||_1 < +\infty$. Par le lemme de Borel-Cantelli, cela entraîne que, sauf sur un ensemble de mesure nulle, on a, pour tout k assez grand :

$$\limsup_{r \to 0} |M_r f(x) - f(x)| \leq \lambda + |f - f_k|(x)$$

Par convergence simple de la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, cela entraîne que, pour presque tout x :

$$\limsup_{r \to 0} |M_r f(x) - f(x)| \leq \lambda$$

En faisant tendre λ vers 0, cela donne le résultat voulu.
Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, le résultat se déduit du cas $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ par troncature.

Exercice 2

1. Quitte à translater, on peut supposer $x = 0$. L'inégalité est aussi invariante par dilatation. On peut donc supposer $r = 1$.
Il suffit donc de montrer qu'il existe $C > 0$ telle que, pour toute $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{B(0,1)} |u(y) - u_{0,1}|^p dy \leq C \int_{B(0,1)} ||\nabla u||^p$$

On reconnaît là l'inégalité de Poincaré-Sobolev (voir TD 2).
2. Puisque toute fonction de $W^{1,p}(\Omega)$ peut se prolonger en une fonction de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, il suffit de considérer le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$.
D'après la question précédente, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in \mathcal{L}^{p,p}(\mathbb{R}^n)$ (l'espace de Campanato défini dans le cours). D'après le théorème de Campanato, on a alors $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ avec $\alpha = 1 - n/p$.

Exercice 3

1. Soit σ comme dans le lemme. Fixons $r \in]0; 1/2]$. Pour tout $x_0 \in B(0,1)$, on a, en appliquant récursivement le lemme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \sup_{B(x_0,2^{-k}r)} u - \inf_{B(x_0,2^{-k}r)} u \leq \sigma^k \left(\sup_{B(x_0,r)} u - \inf_{B(x_0,r)} u \right)$$

D'après le théorème 1.1 rappelé dans l'énoncé :

$$\sup_{B(x_0,r)} u \leq \sup_{B(x_0,r)} \max(0,u) \leq \sup_{B(0,3/2)} \max(0,u) \leq c||u||_{L^2}$$

De même, $\inf_{B(x_0,r)} u \geq -c||u||_{L^2}$. On a donc, pour tous $x_0 \in B(0,1), r \in]0; 1/2], k \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{B(x_0,2^{-k}r)} u - \inf_{B(x_0,2^{-k}r)} u \leq 2c\sigma^k ||u||_{L^2}$$

Pour tous $x, y \in B(0,1)$, si $||x - y|| < r$:

$$|u(x) - u(y)| \leq \sup_{B(x,2^{-k}r)} u - \inf_{B(x,2^{-k}r)} u \leq 2c\sigma^k ||u||_{L^2}$$

pour $k = \left[\log_2 \frac{r}{||x-y||}\right]$. Comme $k \geq \log_2 r - \log_2 ||x-y|| - 1$, on en déduit :

$$|u(x) - u(y)| \leq 2c \exp\left(\log \sigma \left(\log_2 r - \log_2 ||x - y|| - 1\right)\right) ||u||_{L^2} \leq C||x - y||^\alpha ||u||_{L^2}$$

pour $\alpha = -\log_2 \sigma > 0$ et C indépendante de u.
Comme on a vu que $\sup_{B(0,1)} |u| \leq c||u||_{L^2}$, l'inégalité est également valable pour $||x - y|| \geq r$, quitte à modifier la valeur de C. Cela montre donc que u est α-höldérienne, pour une valeur de α indépendante de u.

2. a) Soit $x \in S_{x_0}$. Soit $t_0 = \max\{t \in [0;1] \text{ tq } \forall t' < t, (1-t')x_0 + t'x \in A_\epsilon\}$. Ce t_0 existe et est de plus différent de 1 car $[x_0; x[\not\subset A_\epsilon$.
Soit $t_1 = \min\{t \geq t_0 \text{ tq } (1-t)x_0 + tx \in D_\epsilon\}$. Ce t_1 existe à cause de la manière dont S_{x_0} a été défini.
On a alors, pour tout $t \in]t_0; t_1[$, $(1-t)x_0 + tx \in C_\epsilon$ et :

$$\begin{aligned}
1 - 2\epsilon &\leq u\left((1-t_1)x_0 + t_1 x\right) - u\left((1-t_0)x_0 + t_0 x\right) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \nabla u\left((1-t)x_0 + tx\right), x - x_0 \right\rangle dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \nabla u\left((1-t)x_0 + tx\right), x - x_0 \right\rangle 1_{(1-t)x_0 + tx \in C_\epsilon} dt \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} ||\nabla u\left((1-t)x_0 + tx\right)|| \, ||x - x_0|| 1_{(1-t)x_0 + tx \in C_\epsilon} dt
\end{aligned}$$

En intégrant sur $x \in S_{x_0}$, on en déduit l'inégalité.
b) On fait le changement de variable $\phi : (t, x) \in [0;1] \times S_{x_0} \to (1-t)x_0 + tx \in \mathrm{Im}\,(\phi)$. On a $|\det \phi(t,x)| = t^{n-1} |\left\langle x - x_0, n_{B(0,1)}(x) \right\rangle|$, avec $n_{B(0,1)}(x)$ la normale à $B(0,1)$ au point x.
Or $1 + 2\langle x, x_0 - x\rangle + ||x_0 - x||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, x_0 - x\rangle + ||x_0 - x||^2 = ||x_0||^2 \leq 1$ donc :

$$\left\langle x - x_0, n_{B(0,1)}(x) \right\rangle = \langle x - x_0, x\rangle \geq \frac{1}{2}||x_0 - x||^2$$

et $|\det \phi(t,x)| \geq \frac{1}{2}||x_0 - x||^2 t^{n-1} = \frac{1}{2}\frac{||\phi(t,x) - x_0||^{n-1}}{||x - x_0||^{n-3}} \geq ||x - x_0|| \frac{||\phi(t,x) - x_0||^{n-1}}{2^{n-1}}$. On a utilisé l'inégalité $||x - x_0|| \leq 2$.
On a supposé ici $n \geq 2$ (pour la majoration $||x - x_0||^{n-2} \leq 2^{n-2}$) mais, si $n = 1$, on a $|\det \phi(t,x)| = |x - x_0|$ donc l'inégalité est vraie aussi.
En faisant le changement de variable dans l'intégrale, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
&\int_{S_{x_0}} \int_{t_0}^{t_1} ||\nabla u\left((1-t)x_0 + tx\right)|| \, ||x - x_0|| 1_{(1-t)x_0 + tx \in C_\epsilon} dt \, d\sigma(x) \\
= \quad &\int_{Im(\phi)} ||\nabla u\left(y\right)|| \, ||\phi^{-1}(y)_2 - x_0|| 1_{y \in C_\epsilon} \frac{dy}{|(\det \phi) \circ \phi^{-1}(y)|} \\
\leq 2^{n-1} &\int_{Im(\phi)} \frac{||\nabla u(y)||}{||x_0 - y||^{n-1}} 1_{y \in C_\epsilon} dy \\
\leq 2^{n-1} &\int_{C_\epsilon} \frac{||\nabla u(y)||}{||x_0 - y||^{n-1}} dy
\end{aligned}$$

c) On passe en coordonnées polaires centrées en x. On note v_n la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

$$\int_E \frac{dy}{||x - y||^{n-1}} = \int_0^{+\infty} \frac{|\partial B(x,r) \cap E|}{r^{n-1}} dr$$

Pour tout r, $|\partial B(x,r)\cap E| \leq |\partial B(x,r)| = v_n r^{n-1}$. De plus, $\int_0^{+\infty} |\partial B(x,r)\cap E| dr = |E|$. La fonction $r \to |\partial B(x,r)\cap E|$ qui maximise l'intégrale précédente et vérifie ces conditions est :

$$|\partial B(x,r)\cap E| = v_n r^{n-1} 1_{r\leq r_0}$$

où $r_0 > 0$ est le réel tel que $v_n \frac{r_0^n}{n} = |B(x,r_0)| = |E|$.

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{dy}{||x-y||^{n-1}} &\leq \int_0^{+\infty} \frac{v_n r^{n-1} 1_{r\leq r_0}}{r^{n-1}} dr \\
&= v_n r_0 \\
&= |E|^{1/n} n^{1/n} v_n^{1-1/n}
\end{aligned}$$

d) Soit $D'_\epsilon = \{(1-t)x_0 + tx, t \in [0;1[, x \in S_{x_0}\}$. Alors $D_\epsilon \subset D'_\epsilon$.
En effet, pour tout $y \in D_\epsilon$, si on note $x \in \partial B(0,1)$ le point d'intersection entre $\partial B(0,1)$ et la demi-droite qui a son origine en x_0 et passe par y, on a $y = (1-t)x_0 + tx$ pour un t bien choisi, donc $x \in S_{x_0}$ et $y \in D'_\epsilon$.
On fait le changement de varaible inverse à celui de la question b) :

$$\begin{aligned}
|D_\epsilon| &\leq |D'_\epsilon| \\
&= \int_{D'_\epsilon} 1 dx \\
&= \int_{x\in S_{x_0}} \int_0^1 |\det \phi(t,x)| dt\, d\sigma(x) \\
&\leq \int_{x\in S_{x_0}} \int_0^1 t^{n-1} ||x - x_0|| dt\, d\sigma(x) \\
&\leq 2 \int_{x\in S_{x_0}} \int_0^1 t^{n-1} dt\, d\sigma(x) \\
&= \frac{2}{n} \int_{S_{x_0}} 1 d\sigma(x)
\end{aligned}$$

ce qui entraîne le résultat voulu pour $c''_n = n/2$.
e)

$$\begin{aligned}
|A_\epsilon|\,|D_\epsilon| &= \int_{x_0\in A_\epsilon} |D_\epsilon| dx_0 \\
&\leq \frac{1}{c''_n} \int_{x_0\in A_\epsilon} \int_{S_{x_0}} 1 d\sigma(x) dx_0 \\
&= \frac{1}{(1-2\epsilon)c''_n} \int_{x_0\in A_\epsilon} \int_{S_{x_0}} (1-2\epsilon) d\sigma(x) dx_0 \\
&\leq \frac{c_n}{(1-2\epsilon)c''_n} \int_{x_0\in A_\epsilon} \int_{C_\epsilon} \frac{||\nabla u(y)||}{||x_0 - y||^{n-1}} dy dx_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{c_n c'_n}{(1-2\epsilon)c''_n}|A_\epsilon|^{1/n}\int_{C_\epsilon}||\nabla u(y)||dy\\
&\leq \frac{c_n c'_n}{(1-2\epsilon)c''_n}|A_\epsilon|^{1/n}\left(\int_{C_\epsilon}1dy\right)^{1/2}\left(\int_{C_\epsilon}||\nabla u(y)||^2dy\right)^{1/2}\\
&\leq \frac{c_0^{1/2}c_n c'_n}{(1-2\epsilon)c''_n}|A_\epsilon|^{1/n}\left(\int_{C_\epsilon}1dy\right)^{1/2}\\
&= \frac{c_0^{1/2}c_n c'_n}{(1-2\epsilon)c''_n}|A_\epsilon|^{1/n}|C_\epsilon|^{1/2}
\end{aligned}$$

f) Soit $u \in H^1(B(0,1))$ telle que $\int ||\nabla u||^2 \leq c_0$. On ne suppose pas que u est $\mathcal{C}^1$.
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur $B(0,1)$, telle que $||u-u_k||_{H^1} \to 0$. Quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u au sens de la convergence simple.
Pour tout k et tout ϵ, on définit $A_\epsilon^{(k)}, C_\epsilon^{(k)}, D_\epsilon^{(k)}$ comme dans l'énoncé, en remplaçant la fonction u par la fonction u_k.
Pour tous $\epsilon,\eta > 0$, $|A_0| \leq |A_\epsilon^{(k)}| + \eta$ dès que k est assez grand, puisque u_k converge simplement vers u et donc, pour presque tout $x \in A_0$, $u_k(x) \leq \epsilon$ (donc $x \in A_\epsilon^{(k)}$) pour k assez grand.
De même, pour tous $\epsilon,\eta > 0$, $|D_0| \leq |D_\epsilon^{(k)}| + \eta$ dès que k est assez grand.
Inversement, $|C_0| = |B(0,1)| - |A_0| - |D_0| \geq |B(0,1)| - |A_\epsilon^{(k)}| - |D_\epsilon^{(k)}| - \eta = |C_\epsilon^{(k)}| - \eta$ pour tout k assez grand.
Donc, pour tout ϵ :

$$\begin{aligned}
|A_0|^{1-1/n}\,|D_0| &\leq \liminf_k |A_\epsilon^{(k)}|^{1-1/n}|D_\epsilon^{(k)}|\\
&\leq \frac{c_0^{1/2}c'_n c_n}{(1-2\epsilon)c''_n}\liminf_k |C_\epsilon^{(k)}|^{1/2}\\
&\leq \frac{c_0^{1/2}c'_n c_n}{(1-2\epsilon)c''_n}|C_0|^{1/2}
\end{aligned}$$

ce qui entraîne le résultat.
3. a) D'après le théorème 1.1, puisque v_k est une sous-solution positive de L et $v_k \leq 1$:

$$\int_{B(0,1)}||\nabla v_k||^2 \leq c^2\int_{B(0,3/2)}||v_k||^2 \leq c^2|B(0,3/2)|$$

b) Appliquons le résultat de la question 2. à la fonction $w_k = 2\min(v_k, 1/2)$. Ce résultat dit qu'il existe une constante α, qui dépend seulement de c_0 et de la dimension n (en particulier, qui ne dépend pas de k) telle que :

$$|A_0|\,|D_0| \leq \alpha|C_0|^{1/2}$$

On a utilisé pour simplifier l'inégalité de la question 2. le fait que $|A_0|^{1/n} \leq |B(0,1)|^{1//n}$ et on a intégré dans la constante le terme $|B(0,1)|^{1/n}$.

Pour tout k et tout $x \in B(0,1)$, si $0 < w_k(x) < 1$, alors $0 < v_k(x) < 1/2$ donc $0 < u(x) - (1 - 2^{-k}) < 2^{-k-1}$. On a alors $1 - 2^{-k} < u(x) < 1 - 2^{-(k+1)}$. Donc $v_k(x) > 0$ mais $v_{k+1}(x) = 0$.
Si $v_{k+1}(x) > 0$, alors $u(x) > 1 - 2^{-(k+1)}$ donc $v_k(x) > 1/2$ et $w_k(x) = 1$.
De plus, $|A_0| \geq \mu$ puisque, si $u = 0$, alors $v_k = 0$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
|\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}| &\geq |C_0| \\
&\geq \frac{1}{\alpha^2}|A_0|^2|D_0|^2 \\
&\geq \frac{\mu^2}{\alpha^2}|D_0|^2 \\
&= \frac{\mu^2}{\alpha^2}|\{x \in B(0,1) \text{ tq } w_k(x) = 1\}|^2 \\
&\geq \frac{\mu^2}{\alpha^2}|\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_{k+1}(x) > 0\}|^2
\end{aligned}$$

c) La suite $(|\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_k(x) > 0\}|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, à cause de la définition de v_k.
Soit δ quelconque. Soit temporairement k_0 fixé tel que :

$$|\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_{k_0}(x) > 0\}| > \delta$$

D'après la propriété de décroissance et d'après la question précédente, on a, pour tout $k < k_0$:

$$|\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}| \geq c\delta^2$$

Les ensembles $\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}$ sont disjoints donc :

$$\begin{aligned}
|B(0,1)| &\geq \sum_{k=0}^{k_0-1} |\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}| \\
&\geq ck_0\delta^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $k_0 \leq c^{-1}\delta^{-2}|B(0,1)|$.
Si on prend $k_0 > c^{-1}\delta^{-2}|B(0,1)|$, la propriété voulue est donc vérifiée.
d) Supposons $\delta > 0$ fixé. Nous indiquerons après comment le choisir. Soit k_0 comme à la question précédente.
On a :

$$\int_{B(0,1)} v_{k_0}^2 \leq \delta$$

donc, par le théorème 1.1 de l'énoncé, pour une certaine constante c indépendante de u et de δ :

$$\sup_{B(0,1/2)} v_{k_0} \leq c\delta^{1/2}$$

Choisissons δ de sorte que $c\delta^{1/2} < 1$. Alors, pour tout $x \in B(0,1/2)$:

$$v_{k_0}(x) \leq c\delta^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad u(x) \leq 1-(1-c\delta^{1/2})2^{-k_0}$$

En posant $\eta = 1-(1-c\delta^{1/2})2^{-k_0}$, on a le résultat voulu.

4. À la question précédente, on a montré que si u était une sous-solution de $Lu = 0$, définie sur $B(0,2)$, telle que $0 \leq u \leq 1$ sur $B(0,3/2)$ et $|B(0,1) \cap u^{-1}(\{0\})| = \mu > 0$, alors $0 \leq u \leq \eta$ sur $B(0,1/2)$, avec $\eta < 1$ ne dépendant que de μ, de n, de L. On peut voir de plus que la dépendance en L est uniquement fonction de λ et de $\sup_{i,j} ||a_{ij}||_\infty$.

Soit u une solution de $Lu = 0$, définie sur $B(0,2)$.

Par le théorème 1.1, u est bornée sur $B(0,3/2)$. Notons $m = \inf_{B(0,3/2)} u$ et $M = \sup_{B(0,3/2)} u$. Posons $v_+ = \max(0, 2(u-m)/(M-m)-1)$ et $v_- = \max(0, 1-2(u-m)/(M-m))$. Ce sont deux sous-solutions. On a $0 \leq v_+, v_- \leq 1$ sur $B(0,3/2)$. De plus, $|\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_+(x) \leq 0\}| + |\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_-(x) \leq 0\}| \geq |B(0,1)|$. On a donc :

$$\begin{aligned} &|\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_+(x) \leq 0\}| \geq |B(0,1)|/2 \\ \text{ou } &|\{x \in B(0,1) \text{ tq } v_-(x) \leq 0\}| \geq |B(0,1)|/2 \end{aligned}$$

Supposons par exemple que la première inégalité est vérifiée.

On a alors, d'après le résultat démontré à la question précédente appliqué pour $\mu = |B(0,1)|/2$, $0 \leq v_+ \leq \eta$ sur $B(0,1/2)$, avec η ne dépendant que de n et de L. Ainsi, sur $B(0,1/2)$:

$$\begin{aligned} m \leq u = (v_+ - v_-)\frac{M-m}{2} + \frac{M+m}{2} &\leq \eta\frac{M-m}{2} + \frac{M+m}{2} \\ \Rightarrow \quad \sup_{B(0,1/2)} u - \inf_{B(0,1/2)} u &\leq \sigma(M-m) \end{aligned}$$

si on pose $\sigma = \frac{1+\eta}{2} < 1$.

On a donc démontré le lemme pour $x_0 = 0$ et $r = 1/2$.

Comme σ ne dépend que de la dimension, de λ et de $\sup_{i,j} ||a_{ij}||_\infty$, le résultat est stable par translation et dilatation (par dilatation, on entend le fait de considérer la fonction $u_\alpha = u(\alpha.)$, pour $\alpha > 0$, qui est une solution de $L_\alpha u_\alpha = 0$ pour $L_\alpha v = \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}(\alpha x)\partial_j v)$). Donc le lemme est vrai pour tous x_0 et r.