 

# Feuille d'exercices n$^{o}$1

## Corrigé

**Exercice 1**

1. Notons $C = A - B = \{x - y \text{ tq } x \in A, y \in B\}$. C'est un convexe et, puisque $A$ et $B$ sont disjoints, $C$ ne contient pas 0.
Soit $c \in C$ quelconque. Notons $F = \mathbb{R}c$. Soit $l : F \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $l(c) = -1$. Soit $p$ la fonction telle que $p(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^+C$ et $p(x) = +\infty$ sinon. Elle vérifie les hypothèses du théorème de Hahn-Banach. L'inégalité triangulaire provient du fait que $\mathbb{R}^+C$, comme $C$, est convexe (pour tous $x, y \in E$, soit $x \notin \mathbb{R}^+C$ ou $y \notin \mathbb{R}^+C$ et alors $p(x+y) \leq +\infty = p(x) + p(y)$, soit $x$ et $y$ appartiennent tous deux à $\mathbb{R}^+C$ et alors $(x+y)/2$ aussi, donc $x+y$ aussi et $p(x+y) = 0 = p(x) + p(y)$).
Sur $F = \mathbb{R}c$, on a $l \leq p$. En effet, si $x = \lambda c$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\lambda \geq 0$ et alors $l(x) = -\lambda \leq 0 = p(x)$, soit $\lambda < 0$ et alors $x = \lambda c \notin \mathbb{R}^+C$ (sinon, cela impliquerait que 0 appartient à $C$) donc $f(x) < +\infty = p(x)$.
Il existe donc une forme linéaire $f$ qui coïncide avec $l$ sur $F$ et telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.
Puisque $f(c) = l(c) = -1$, la forme linéaire $f$ est non-nulle.
D'après la définition de $p$, $f(x) \leq 0$ si $x \in C$ donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in A, y \in B \qquad f(x) \leq f(y) \\ &\iff \sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{x \in B} f(x) \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à montrer que $f$ est continue. Soit $r > 0$ tel que $B(c, r) \subset C$ ; un tel réel existe car $C$ est ouvert. Pour tout $x \in B(0,1)$, $c + rx \in C$ et $c - rx \in C$. Puisque $f$ est négative sur $C$ :

$$f(c) + rf(x) \leq 0 \qquad \text{et} \qquad f(c) - rf(x) \leq 0$$

Donc $|f(x)| \leq -f(c)/r$. La forme linéaire $f$ est bornée sur $B(0,1)$ donc elle est continue.

2. Puisque $A$ et $B$ sont fermés et au moins l'un des deux est compact, il existe $r > 0$ tel que, pour tous $x \in A, y \in B$, $||x - y|| > r$.
Posons $A_2 = \{x + e \text{ tq } x \in A, ||e|| < r/2\}$ et $B_2 = \{x + e \text{ tq } x \in B, ||e|| < r/2\}$. Les ensembles $A_2$ et $B_2$ sont des ouverts convexes et disjoints. D'après la première question, il existe une forme linéaire continue non-nulle $f$ telle que :

$$\sup_{x \in A_2} f(x) \leq \inf_{x \in B_2} f(x)$$

D'après la définition de $A_2$ :

$$\sup_{x \in A_2} f(x) = \sup_{x \in A, ||e|| < r/2} f(x) + f(e) = \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{e \in B(0,r/2)} f(e)$$

De même :

$$\inf_{x \in B_2} f(x) = \inf_{x \in B} f(x) + \inf_{e \in B(0,r/2)} f(e) = \inf_{x \in B} f(x) - \sup_{e \in B(0,r/2)} f(e)$$

Donc :

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{x \in B} f(x) - 2 \sup_{e \in B(0,r/2)} f(e)$$

Puisque $f$ est non-nulle, $\sup_{e \in B(0,r/2)} f(e) > 0$ donc :

$$\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{x \in B} f(x)$$

**Exercice 2**

1. Soit $H$ un espace de Hilbert (sur $\mathbb{R}$). Le théorème de représentation de Riesz dit que, pour toute forme linéaire continue $\phi \in H'$, il existe un unique $a \in H$ tel que :

$$\forall x \in H \qquad \phi(x) = \langle a, x \rangle$$

2. Soit $\phi$ une forme linéaire continue.
D'après le théorème de représentation de Riesz, pour tout $u \in H$, il existe $Au \in H$ tel que :

$$\forall v \in H \qquad a(u, v) = \langle Au, v \rangle$$

De plus, il existe $U \in H$ tel que :

$$\forall v \in H \qquad \phi(v) = \langle U, v \rangle$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe $u$ tel que $Au = U$. Nous allons donc démontrer que $A$ est surjective.
L'application $A$ est linéaire. Puisque $a$ est continue, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u$ :

$$\forall v \in H \qquad |\langle Au, v \rangle| = a(u, v) \leq C||u||\,||v||$$

ce qui implique $||Au|| \leq C||u||$. L'application $A$ est donc continue.
De plus, par hypothèse, on a, pour tout $u \in H$, $||Au||\,||u|| \geq |\langle Au, u \rangle| = |a(u, u)| \geq c||u||^2$ donc $||Au|| \geq c||u||$. Cela implique que $A$ est un isomorphisme sur son image. Donc $\mathrm{Im}(A)$ est un espace complet, ce qui entraîne que c'est un fermé de $H$.
Pour montrer $\mathrm{Im}(A) = H$, il suffit maintenant de montrer que $(\mathrm{Im}(A))^\perp = \{0\}$. Pour cela, supposons fixé $h \in (\mathrm{Im}(A))^\perp$ et montrons qu'on a $h = 0$.
On doit avoir $0 = \langle Ah, h \rangle = a(h, h) \geq c||h||^2$. Donc $h = 0$.

**Exercice 3**

1. Fixons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'éléments telle que $\overline{\text{Vect}\left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}} = H$. Quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que c'est une famille libre (aucune combinaison linéaire finie à coefficients non tous nuls d'éléments de la suite n'est nulle). On l'orthonormalise par Gram-Schmidt, pour obtenir une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.
Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n a_n^2 < +\infty$, la suite $\sum_n a_n e_n$ converge dans $H$ : la suite de ses sommes partielles est de Cauchy. De plus, en passant les sommes partielles à la limite, $||\sum_n a_n e_n||^2 = \sum_n a_n^2$.
Si $\sum_n a_n e_n = \sum_n b_n e_n$, alors $\sum_n (a_n - b_n)e_n = 0$ donc $0 = \sum_n (a_n - b_n)^2$ et $a_n = b_n$ pour tout $n$. On a donc l'unicité de la décomposition.
Montrons l'existence. Soit $x$ fixé. Posons $y = \sum_n \langle x, e_n\rangle e_n$ (la somme est bien définie car $\sum_n \langle x, e_n\rangle^2 \le ||x||^2 < +\infty$). Alors $y - x$ est orthogonal à $e_n$ pour tout $n$. Donc $y - x \in \text{Vect}\left\{(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}^\perp = \text{Vect}\left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}^\perp$. Ce dernier ensemble est l'orthogonal d'un ensemble dense ; il est donc réduit à 0 et $x = y = \sum_n \langle x, e_n\rangle e_n$.

2. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de $H$. Pour tout $k$, notons :

$$x_k = \sum_n a_n^{(k)} e_n$$

où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne fixée de $H$.
Puisque $(a_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ pour tout $n$, on peut construire, par extraction diagonale, une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_n^{(\phi(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine limite qu'on note $a_n^\infty$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le N} a_n^{\infty 2} &= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n\le N} a_n^{\phi(k)2} \\
&\le \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\le N} a_n^{\phi(k)2} \\
&\le \sup_{k\in\mathbb{N}} ||a^{\phi(k)}||^2 \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Donc $\sum_n a_n^{\infty 2} < +\infty$ et on peut poser $x_\infty = \sum_n a_n^\infty e_n$.
Montrons que $x_{\phi(k)}$ converge faiblement vers $x_\infty$ lorsque $k$ tend vers l'infini. D'après le théorème de représentation de Riesz, toute forme linéaire continue sur $H$ est de la forme $c \to \langle c, u\rangle$, pour un certain $u \in H$. Il suffit donc de démontrer que, pour tout $u \in H$ :

$$\langle x_{\phi(k)}, u\rangle \overset{k\to+\infty}{\to} \langle x_\infty, u\rangle$$

On écrit $u$ sous la forme $u = \sum_n u_n e_n$.
Pour tout $k$ :

$$\langle x_\infty - x_{\phi(k)}, u\rangle = \sum_n (a_n^\infty - a_n^{\phi(k)})u_n$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \leq N}(a_n^\infty - a_n^{\phi(k)})u_n \to 0$ quand $k \to +\infty$, puisque $a_n^\infty - a_n^{\phi(k)} \to 0$ pour tout $n \leq N$. De plus, par Cauchy-Schwarz, on a pour tout $k$ :

$$\left|\sum_{n>N}(a_n^\infty - a_n^{\phi(k)})u_n\right| \leq 2 \sup_s ||x_s|| \sqrt{\sum_{n>N} u_n^2}$$

ce qui tend vers 0 uniformément en $k$ lorsque $N$ tend vers $+\infty$.
En combinant les deux précédentes remarques, on obtient :

$$\langle x_\infty - x_{\phi(k)}, u \rangle = \sum_n (a_n^\infty - a_n^{\phi(k)})u_n \overset{k \to +\infty}{\to} 0$$

3. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée. Posons $H_2$ l'adhérence dans $H$ de l'espace vectoriel engendré par cette suite. Comme $H_2$ est un espace de Hilbert séparable, il existe, d'après la question précédente, une extraction telle que $x_{\phi(k)}$ converge faiblement dans $H_2$ vers une limite $x_\infty$, lorsque $k \to +\infty$.
La convergence faible dans un sous-espace implique la convergence faible dans l'espace tout entier : la suite $(x_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x_\infty$.

**Exercice 4**

1. a) L'ensemble $\mathcal{U}$ contient $E$ et $\emptyset$.
L'ensemble $\mathcal{U}$ est stable par intersection : si $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, alors $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$. En effet, pour tout $x \in U_1 \cap U_2$, puisque $x \in U_1$ et $x \in U_2$, il existe $r_1, r_2 > 0$ et $i_1^1, ..., i_{n_1}^1, i_1^2, ..., i_{n_2}^2$ tels que :

$$\{x' \in E \text{ tq } \forall k, p_{i_k^1}(x - x') < r_1\} \subset U_1$$
$$\{x' \in E \text{ tq } \forall k, p_{i_k^2}(x - x') < r_2\} \subset U_2$$

Alors, en posant $r = \min(r_1, r_2)$ et $\{j_1, ..., j_n\} = \{i_1^1, ..., i_{n_1}^1, i_1^2, ..., i_{n_2}^2\}$, on a :

$$\{x' \in E \text{ tq } \forall k, p_{j_k}(x - x') < r\} \subset U_1 \cap U_2$$

De plus, l'union d'une famille de parties de $\mathcal{U}$ appartient encore à $\mathcal{U}$ : si les $(U_i)_{i \in I}$ sont des éléments de $\mathcal{U}$, alors $V = \cup_i U_i$ est aussi un élément de $\mathcal{U}$. En effet, si $x \in V$, il existe $i$ tel que $V \in U_i$. Il existe donc $r > 0$ et $i_1, ..., i_n$ dans $I$ tels que :

$$\{x' \in E \text{ tq } \forall k, p_{i_k}(x - x') < r\} \subset U_i \subset V$$

b) On va traiter seulement le cas de l'addition. Celui de la multiplication par un scalaire est similaire.
Soit $U$ un ouvert de $E$. Soit $A \subset E \times E$ son antécédent par $+$. Montrons que $A$ est ouvert.
Soit $(x, y) \in A$. Il faut montrer qu'il existe $A_1$ et $A_2$ des ouverts de $E$ tels que $(x, y) \in A_1 \times A_2 \subset A$.
Puisque $x + y \in U$ et $U$ est ouvert, il existe $r > 0$ et $i_1, ..., i_n$ dans $I$ tels que :

$$\{z \in E \text{ tq } \forall k, p_{i_k}(x + y - z) < r\} \subset U \tag{1}$$

Posons $A_1 = \{z \in E \text{ tq } \forall k, p_{i_k}(x-z) < r/2\}$ et $A_2 = \{z \in E \text{ tq } \forall k, p_{i_k}(y-z) < r/2\}$. Les ensembles $A_1$ et $A_2$ sont ouverts (cela se vérifie en utilisant l'inégalité triangulaire de $p$). De plus, $(x,y) \in A_1 \times A_2$. Enfin, $A_1 \times A_2 \subset A$ puisque, si $(z_1, z_2) \in A_1 \times A_2$ :

$$\forall k \qquad p_{i_k}(x+y-(z_1+z_2)) \leq p(x-z_1) + p(y-z_2) < r/2 + r/2 = r$$

donc, par (1), $z_1 + z_2 \in U$.
c) Soient $x$ et $y$ deux éléments distincts de $E$. Montrons qu'il existe $U_1, U_2$ des ouverts disjoints tels que $x \in U_1$ et $y \in U_2$.
Par hypothèse, il existe $i \in I$ tel que $p_i(x-y) \neq 0$. Posons :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{z \in E \text{ tq } p_i(x-z) < p_i(x-y)/2\} \\ U_2 &= \{z \in E \text{ tq } p_i(y-z) < p_i(x-y)/2\} \end{aligned}$$

Les ensembles $U_1$ et $U_2$ sont tous deux ouverts. Le premier contient $x$ et l'autre $y$. Il faut montrer qu'ils sont disjoints.
Si $z \in U_1 \cap U_2$, alors $p_i(x-y) = p_i(x-z+z-y) \leq p_i(x-z) + p_i(z-y) < p_i(x-y)$. C'est absurde. Donc $U_1$ et $U_2$ sont disjoints.
d) Supposons d'abord que $q$ est continue. Alors $q^{-1}([0;1[)$ est un ouvert de $E$ contenant 0. En appliquant la définition des ouverts donnée à la question a), pour le point $x = 0$, on obtient qu'il existe $r > 0$ et $i_1, ..., i_n \in I$ tels que, pour tout $x' \in E$.

$$(\forall k, p_{i_k}(x') < r) \quad \Rightarrow \quad q(x') < 1$$

Alors, pour tout $x \in E$, $q(x) \leq \frac{1}{r} \sup_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}(x)$.
En effet, si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie $\lambda \sup_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}(x) < r$, la définition de $r$ et des $i_k$ donne :

$$q(\lambda x) < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad q(x) < \frac{1}{\lambda}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} q(x) &\leq \inf \left\{ \frac{1}{\lambda} \text{ tq } \lambda > 0 \text{ et } \lambda \sup_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}(x) < r \right\} \\ &= \inf \left\{ \mu \text{ tq } \mu > 0 \text{ et } \frac{1}{r} \sup_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}(x) < \mu \right\} \\ &= \frac{1}{r} \sup_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}(x) \end{aligned}$$

Supposons maintenant $q \leq C \sup_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}$ et montrons que $q$ est continue. Soit $A$ un ouvert de $\mathbb{R}^+$. Montrons que $q^{-1}(A)$ est ouvert.
Soit $x \in q^{-1}(A)$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{R}^+ \cap ]q(x) - \epsilon; q(x) + \epsilon[ \subset A$. Posons $r = \epsilon / C$. Alors :

$$\begin{aligned} \{x' \in E \text{ tq } \forall k, p_{i_k}(x-x') < r\} &= \{x' \in E \text{ tq } C \sup_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}(x-x') < \epsilon\} \\ &\subset \{x' \in E \text{ tq } q(x-x') < \epsilon\} \\ &\subset \{x' \in E \text{ tq } |q(x) - q(x')| \leq q(x-x') < \epsilon\} \\ &\subset q^{-1}(A) \end{aligned}$$

e) Si $x_k \to x_\infty$, alors, pour toute semi-norme continue $p$, comme $p$ est continue et comme la soustraction est continue, $p(x_k - x_\infty) \to 0$ lorsque $k \to +\infty$.
Réciproquement, supposons que, pour toute semi-norme continue $p$, $p(x_k) \to p(x_\infty)$ lorsque $k \to +\infty$. Soit $U \in \mathcal{U}$ un ouvert contenant $x_\infty$. Il faut montrer que $x_k \in U$ pour tout $k$ assez grand.
Soient $r > 0$ et $i_1, ..., i_n \in I$ comme dans la définition de $\mathcal{U}$ (au point $x = x_\infty$). Pour tout $s \leq n$ et pour tout $k$ assez grand, $p_{i_s}(x_\infty - x_k) < r$ (puisque $p_{i_s}(x_\infty - x_k) \to 0$ quand $k$ tend vers $+\infty$). Donc $x_k \in U$ pour tout $k$ assez grand.

2. a) Supposons d'abord la condition indiquée vérifiée et montrons que $f_k$ tend vers $f_\infty$.
D'après la question 1.e), il suffit de montrer que, pour toute semi-norme continue $p$, $p(f_k - f_\infty) \to 0$ lorsque $k \to +\infty$.
Pour tout $i$, la semi-norme $p$ est continue sur $\mathcal{D}_{K_i}$ (ce n'est pas a priori évident puisqu'on n'a pas montré que la topologie induite sur $\mathcal{D}_{K_i}$ par la topologie de $\mathcal{D}$ coïncidait avec celle engendrée par les semi-normes $(p_{m,K_i})_{m \in \mathbb{N}}$). En effet, d'après la question 1.d), elle est majorée par $C \sup_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}$ où les $p_{i_k}$ sont des éléments de $\mathcal{P}$. Chaque $p_{i_k}$ est continue sur $\mathcal{D}_{K_i}$, donc majorée sur $\mathcal{D}_{K_i}$ (à nouveau par 1.d)) par une semi-norme de la forme $C_{i_k} \sup_{1 \leq s \leq n_{i_k}} p_{s,K_i}$. La semi-norme $p$ initiale est donc également majorée sur $\mathcal{D}_{K_i}$ par une fonction de la forme $C \sup_{1 \leq s \leq N} p_{s,K_i}$. Toujours d'après 1.d), $p$ est donc continue sur $\mathcal{D}_{K_i}$.
Puisque les $f_k$ et $f_\infty$ appartiennent à un même espace $\mathcal{D}_{K_i}$, puisque $f_k \to f_\infty$ dans $\mathcal{D}_{K_i}$ et puisque $p_{|\mathcal{D}_{K_i}}$ est continue, on a bien $p(f_k - f_\infty) \to 0$.
Inversement, supposons maintenant que $f_k$ tend vers $f_\infty$ et montrons que la condition voulue est vérifiée.
Montrons qu'il existe $i$ tel que $f_k \in \mathcal{D}_{K_i}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Raisonnons par l'absurde. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que, pour tout $k$, $f_k \notin \mathcal{D}_{K_k}$.
Définissons :
$$\forall f \in \mathcal{D} \qquad p(f) = \sum_{k \geq 0} 2^k \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}^n - K_k} |f(x)|}{\sup_{x \in \mathbb{R}^n - K_k} |f_k(x)|}$$
Cette fonction est bien définie car, pour toute $f \in \mathcal{D}$, seul un nombre fini de termes dans la somme ne sont pas nuls : si $f \in K_j$ pour un certain $j$, alors $\sup_{x \in \mathbb{R}^n - K_k} |f(x)| = 0$ pour tout $k \geq j$. De plus, pour tout $k$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^n - K_k} |f_k(x)| > 0$, sinon cela signifie que $f_k$ est nulle sur $\mathbb{R}^n - K_k$ et donc que $f_k \in \mathcal{D}_{K_k}$.
La fonction $p$ est une semi-norme sur $\mathcal{D}$ (cela se vérifie en montrant que chaque terme de la somme est une semi-norme). Sa restriction à chaque $\mathcal{D}_{K_i}$ est majorée par $C_i p_{0,K_i}$ pour une certaine constante $C_i > 0$ ; la restriction est donc continue.
La semi-norme $p$ appartient donc à la famille $\mathcal{P}$ ; elle est alors continue pour la topologie sur $\mathcal{D}$ définie par $\mathcal{P}$. Donc $p(f_k) \to p(f_\infty)$ lorsque $k \to +\infty$.
C'est absurde : pour tout $k$, $p(f_k) \geq 2^k \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}^n - K_k} |f_k(x)|}{\sup_{x \in \mathbb{R}^n - K_k} |f_k(x)|} = 2^k$, donc $(p(f_k))_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite convergente.
Il existe donc $i$ tel que $f_k \in \mathcal{D}_{K_i}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si on fixe $j$ tel que $f_\infty \in \mathcal{D}_{K_j}$, alors $f_k \in \mathcal{D}_{K_{\max(i,j)}}$ pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. La première partie de la condition est démontrée.
En fixant $i$ tel que dans la propriété à prouver, montrons que $f_k \to f_\infty$ dans $\mathcal{D}_{K_i}$. D'après la question 1.e), il suffit de montrer que, pour toute semi-norme continue $p$ sur $\mathcal{D}_{K_i}$, $p(f_k - f_\infty) \to 0$.

D'après la question 1.d), il suffit de le montrer pour les semi-normes de la forme $p_{m,K_i}$ avec $m \in \mathbb{N}$.
Pour tout $m$, $q : g \to \sup_{|\alpha|\leq m} ||g^\alpha||_\infty$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{D}$ (pour tout $k$, sa restriction à $\mathcal{D}_{K_k}$ vaut $p_{m,K_k}$ donc est continue). Puisque $f_k \to f_\infty$ dans $\mathcal{D}$, $q(f_k - f_\infty) \to 0$. Donc $p_{m,K_i}(f_k - f_\infty) = q(f_k - f_\infty) \to 0$.
b) Supposons par l'absurde que la topologie de $\mathcal{D}$ est engendrée par une distance $d$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, fixons $f_k \in \mathcal{D}$ une fonction qui n'est pas à support dans $K_k$. La suite $(2^{-n}f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (cela se vérifie à l'aide de la question précédente). Il existe donc $n_k$ tel que $d(2^{-n_k}f_k, 0) \leq 2^{-k}$.
La suite $(2^{-n_k}f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge alors vers 0 au sens de la distance $d$. En revanche, elle ne vérifie par la condition de la question précédente. C'est absurde.

3. Soit $L : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. La fonction $f \to |L(f)|$ est une semi-norme. Si $L$ est une distribution, c'est une semi-norme continue (comme composition de fonctions continues). Pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}^n$, si on fixe $i \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_i$, alors la restriction de $|L|$ à $K_i$ est continue. D'après la question 1.d), il existe donc $C > 0$ et $n$ tel que :

$$\forall f \in \mathcal{D}_{K_i} \qquad |L(f)| \leq C \sup_{1\leq k\leq n} p_{k,K_i}(f) = Cp_{n,K_i}(f)$$

Si $\mathrm{Supp}(f) \subset K$, $p_{n,K_i}(f) = p_{n,K}(f)$ donc :

$$\forall f \in \mathcal{D} \text{ tq } \mathrm{Supp}(f) \subset K, \qquad |L(f)| \leq Cp_{n,K}(f)$$

Réciproquement, supposons la condition vérifiée. D'après cette condition, $|L|$ est une semi-norme continue sur tout $\mathcal{D}_K$ (d'après la question 1.d)). C'est donc un élément de $\mathcal{P}$. En utilisant ce fait, on peut démontrer que $L$ est continue de la même façon qu'à la question 1.d).

**Exercice 5**

1. a) C'est quasiment la même démonstration qu'à la question 3. de l'exercice 4.
b) Pour toute $f \in \mathcal{D}$, posons $T(f) = \sum_{k\geq 0} 2^k f(k, 0, ..., 0)$.
Cette forme linéaire est bien définie sur $\mathcal{D}$ puisque, si $f$ appartient à $\mathcal{D}$, $f$ est à support compact donc seulement un nombre fini de termes de la somme sont non-nuls. Elle est de plus continue car elle vérifie la propriété de la question 3 de l'exercice 4. C'est donc une distribution.
En revanche, elle ne se prolonge pas en une distribution tempérée. En effet, montrons qu'elle ne vérifie pas la condition de la question a).
Soit $g \in \mathcal{D}$ une fonction à support inclus dans $B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$, telle que $g(0) = 1$. Alors, en notant $g_k : x \to g(x - (k, 0, ..., 0))$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad T(g_k) = 2^k$$

Pour tout $(m, s) \in \mathbb{N}^2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
p_{m,s}(g_k) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq m} (1 + ||x||^s)|\partial^\alpha g(x - (k, 0, ..., 0))| \\
&= \sup_{|x-(k,0,...,0)|<1, |\alpha| \leq m} (1 + ||x||^s)|\partial^\alpha g(x - (k, 0, ..., 0))| \\
&\leq \sup_{|x-(k,0,...,0)|<1, |\alpha| \leq m} (1 + (k+1)^s)|\partial^\alpha g(x - (k, 0, ..., 0))| \\
&= (1 + (k+1)^s) \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq m} |\partial^\alpha g(x)|
\end{aligned}$$

Donc, quels que soient $m, s \in \mathbb{N}, C > 0$, $|T(g_k)| = 2^k > C p_{m,s}(g_k)$ pour tout $k$ assez grand. On n'a donc pas :

$$|T| \leq C p_{m,s}$$

2. a) On rappelle les égalités suivantes, valables pour toute fonction $f \in \mathcal{S}'$ et tout indice $i \leq n$ :

$$\mathcal{F}(\partial_i f)(\xi) = i\xi_i \mathcal{F}(f) \qquad \mathcal{F}(x_i f) = i\partial_i(\mathcal{F}f)$$

Donc, pour toute $f \in \mathcal{S}$, tout $k \in \mathbb{N}$, tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^m$ et tout indice $i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad |x_i|^k |\partial^\alpha(\mathcal{F}f)(x)| &= |x_i|^k |\mathcal{F}(x^\alpha f)|(x) \\
&= |\mathcal{F}(\partial_i^k(x^\alpha f))|(x)
\end{aligned}$$

En développant (par la formule de Leibniz) $\partial_i^k(x^\alpha f)$, on en déduit que, pour une certaine constante $C$ :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x_i|^k |\partial^\alpha(\mathcal{F}f)(x)| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, s \leq k, |\gamma| \leq |\alpha|} |\mathcal{F}(x^\gamma \partial_i^s f)(x)| = C \sup_{s \leq k, |\gamma| \leq |\alpha|} ||\mathcal{F}(x^\gamma \partial_i^s f)||_\infty$$

Pour toute fonction $g \in \mathcal{S}$, $||\mathcal{F}(g)||_\infty \leq ||g||_1$. De plus, $||g||_1 \leq D p_{S,0}(g)$ pour une certaine constante $D$ bien choisie et pour $S$ tel que $(1 + ||x||^S)^{-1}$ est intégrable. Donc :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x_i|^k |\partial^\alpha(\mathcal{F}f)(x)| \leq DC \sup_{s \leq k, |\gamma| \leq |\alpha|} p_{S,0}(x^\gamma \partial_i^s f) \leq \tilde{C} p_{S+|\alpha|,k}(f)$$

Cela implique que, pour tout $k$ et pour tout $m$, si on choisit bien la constante $M > 0$, on a :

$$\forall f \in \mathcal{S} \qquad p_{k,m}(\mathcal{F}f) \leq M p_{S+m,k}(f)$$

Concluons. Si $C > 0$ et $m, k \in \mathbb{N}$ sont tels que :

$$\forall f \in \mathcal{S} \qquad |T(f)| \leq C p_{m,k}(f)$$

alors, pour toute $f \in \mathcal{S}$ :

$$|\mathcal{F}T(f)| \leq C p_{m,k}(\mathcal{F}f) \leq M p_{S+k,m}(f)$$

Donc, d'après la question 1.a), $\mathcal{F}T$ est une distribution tempérée.

b) Pour toute $f \in \mathcal{S}$, $\mathcal{F}\delta_0(f) = (\mathcal{F}f)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x$.
La transformée de Fourier du dirac en 0 est donc la distribution $T_1 : f \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x$.
c) Pour toute $f \in \mathcal{S}$ :

$$\mathcal{F}T_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} g\mathcal{F}f = \int_{\mathbb{R}^n} f\mathcal{F}g = T_{\mathcal{F}g}(f)$$

donc $\mathcal{F}T_g = T_{\mathcal{F}(g)}$.

**Exercice 6**

1. Comme dans la définition de l'intégrale, on peut écrire $f$ sous la forme $f = \sum_{i=1}^N \phi_i f$ avec $(\phi_i)_{i=1,\dots,N}$ une partition de l'unité convenable. Cela nous permet de n'avoir à considérer que l'un des deux cas suivants :

Premier cas : Le support de $f$ est inclus dans un compact de la forme $[a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$, qui est lui-même inclus dans $\Omega$.
Deuxième cas : Le support de $f$ est inclus dans un ouvert $\mathcal{V}$, qui vérifie la propriété décrite dans l'énoncé, pour un $\mathcal{U}$ de la forme $[a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$ (avec $a_1 < 0 < b_1$).

Traitons d'abord le premier cas.
Puisque $f$ est nulle sur $\partial\Omega$, $\int_{\partial\Omega} \langle f, n\rangle \, dS = 0$. Il faut donc montrer $\int_\Omega \mathrm{div}(f)\, dx = 0$. Or :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{div}(f)\, dx &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\, dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \dots \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\, dx_i dx_n \dots dx_{i+1} dx_{i-1} \dots dx_1 \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \dots \int_{a_n}^{b_n} \left[f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, ., x_{i+1}, \dots, x_n)\right]_{a_i}^{b_i} dx_n \dots dx_{i+1} dx_{i-1} \dots dx_1 \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \dots \int_{a_n}^{b_n} 0\, dx_n \dots dx_{i+1} dx_{i-1} \dots dx_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Traitons ensuite le deuxième cas. On va ramener le calcul des deux intégrales à une intégration sur $\mathcal{U}$ en posant $g = f \circ \phi$ et $\mathcal{U}^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{U} \text{ tq } x_1 < 0\}$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{div}(f)\, dx &= \int_\Omega \mathrm{div}(g \circ \phi^{-1})\, dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \circ \phi^{-1}\right) \frac{\partial(\phi^{-1})_j}{\partial x_i}\, dx \\
&= \int_{\mathcal{U}^-} \sum_{i,j} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial(\phi^{-1})_j}{\partial x_i} \circ \phi\right) |\det \phi|\, dx
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\mathcal{U}^- = [a_1; 0[\times[a_2; b_2]\times ... \times[a_n; b_n]$ et en intégrant par parties (en traitant séparément les cas $j = 1$ et $j \neq 1$), on obtient :

$$\int_\Omega \mathrm{div}(f)\,dx = -\int_{\mathcal{U}^-} \sum_{i,j} g_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\frac{\partial(\phi^{-1})_j}{\partial x_i}\circ\phi\right)|\det\phi|\right)\,dx$$
$$+\int_{\tilde{\mathcal{U}}} \sum_i g_i(0,x)\left(\frac{\partial(\phi^{-1})_1}{\partial x_i}\circ\tilde{\phi}(x)\right)|\det\phi(0,x)|\,dx$$

où $\tilde{\mathcal{U}}$ et $\tilde{\phi}$ sont définies comme dans l'énoncé.
D'après le premier cas que nous avons traité, $\int_\Omega \mathrm{div}(f)$ ne dépend que des valeurs de $f$ sur un voisinage de $\partial\Omega$ : si deux fonctions $f$ et $\tilde{f}$ coïncident sur un voisinage de $\partial\Omega$, alors $f - \tilde{f}$ est une somme de fonctions comme dans le premier cas et on a :

$$\int_\Omega \mathrm{div}(f-\tilde{f})\,dx = 0$$

Cela entraîne que le premier terme de la somme qu'on vient d'obtenir est nul et :

$$\int_\Omega \mathrm{div}(f)\,dx = \int_{\tilde{\mathcal{U}}} \sum_i g_i(0,x)\left(\frac{\partial(\phi^{-1})_1}{\partial x_i}\circ\tilde{\phi}(x)\right)|\det\phi(0,x)|\,dx$$

Il reste à montrer :

$$\int_{\tilde{\mathcal{U}}} \sum_i g_i(0,x)\left(\frac{\partial(\phi^{-1})_1}{\partial x_i}\circ\tilde{\phi}(x)\right)|\det\phi(0,x)|\,dx = \int_{\tilde{U}} \langle f\circ\tilde{\phi}(x), n\circ\tilde{\phi}(x)\rangle|\det\tilde{\phi}(x)|\,dx$$

Comme $f\circ\tilde{\phi} = g(0,.)$, il suffit de montrer :

$$(n\circ\tilde{\phi}(x))|\det\tilde{\phi}(x)| = |\det\phi(0,x)|\left(\frac{\partial(\phi^{-1})_1}{\partial x_i}\circ\tilde{\phi}(x)\right)_{i=1,\dots,n} \tag{2}$$

Le vecteur $\left(\frac{\partial(\phi^{-1})_1}{\partial x_i}\circ\tilde{\phi}(x)\right)_{i=1,\dots,n}$ appartient à $\left(d\phi_{(0,x)}(\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1})\right)^\perp$. C'est une conséquence de l'égalité $(d(\phi^{-1})\circ\phi)d\phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Il est donc colinéaire à $n(\tilde{\phi}(x))$. Il faut calculer le coefficient de proportionnalité.
De plus, si on note $d\phi_{(0,x)}(1,0,...,0) = \alpha(x)n(\tilde{\phi}(x)) + u(x)$ avec $u(x) \in d\phi_{(0,x)}(\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1})$ et $\alpha(x)\in\mathbb{R}_+^*$, l'égalité $(d(\phi^{-1})\circ\phi)d\phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ donne :

$$\left\langle \left(\frac{\partial(\phi^{-1})_1}{\partial x_i}\circ\tilde{\phi}(x)\right)_{i=1,\dots,n},\ d\phi_{(0,x)}(1,0,...,0)\right\rangle = ((d(\phi^{-1})\circ\phi)d\phi)_{1,1} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial(\phi^{-1})_1}{\partial x_i}\circ\tilde{\phi}(x)\right)_{i=1,\dots,n} = \frac{1}{\alpha(x)}n(\tilde{\phi}(x))$$

En outre, $|\det\phi(0,x)| = \alpha(x)|\det\tilde{\phi}(x)|$. En combinant les deux dernières équations, on obtient (2).

2. Si on pose $f = v\nabla u$, la formule de Green est exactement l'égalité de la question 1., puisque $\mathrm{div}(f) = \nabla u.\nabla v + v\Delta u$.

**Exercice 7**

Posons $h = \gamma - 1$ et $w = u - v$. On a alors :

$$\begin{aligned} Q_\gamma(f) &= \int_\Omega (1+h)|\nabla v + \nabla w|^2\,dx \\ &= Q_1(f) + 2\int_\Omega \nabla v.\nabla w\,dx + \int_\Omega |\nabla w|^2\,dx + \int_\Omega h|\nabla v|^2\,dx + \int_\Omega h\nabla w.(2\nabla v + \nabla w)\,dx \end{aligned}$$

La fonction $w \in H^1$ est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{div}(\gamma\nabla(v+w)) &=& 0 \text{ dans } \Omega \\ v+w &=& f \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Compte tenu de l'équation satisfaite par $v$, $w$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{div}(\gamma\nabla w) &=& -\mathrm{div}((1+h)\nabla v) = -\nabla h.\nabla v \text{ dans } \Omega \\ w &=& 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Nous allons utiliser cette équation pour majorer $||\nabla w||_2$ :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \gamma|\nabla w|^2\,dx &= -\int_\Omega \mathrm{div}(\gamma\nabla w)w\,dx \\ &= \int_\Omega w\nabla h.\nabla v\,dx \\ &\leq ||w||_2||\nabla h||_\infty||\nabla v||_2 \end{aligned}$$

(On a utilisé dans l'intégration par parties la condition $w_{|\partial\Omega} = 0$.)
D'après l'inégalité de Poincaré, puisque $w \in H^1_0$ :

$$||w||_2 \leq C_\Omega||\nabla w||_2$$

pour une certaine constante $C_\Omega$ qui ne dépend pas de $w$.
Comme $||\gamma||_\infty \geq 1 - ||h||_\infty$, la succession d'inégalités donne :

$$(1 - ||h||_\infty)||\nabla w||_2^2 \leq C_\Omega||\nabla w||_2||\nabla h||_\infty||\nabla v||_2$$

et donc, dès que $||h||_\infty < 1$ :

$$||\nabla w||_2 \leq \frac{C_\Omega}{1 - ||h||_\infty}||\nabla v||_2||\nabla h||_\infty$$

On a donc :

$$Q_\gamma(f) = Q_1(f) + 2\int_\Omega \nabla v.\nabla w\,dx + \int_\Omega h|\nabla v|^2\,dx + O((||h||_2 + ||\nabla h||_2)^2)$$

De plus, comme $w_{|\partial\Omega} = 0$ et $\Delta v = 0$ :

$$\int_\Omega \nabla v.\nabla w \, dx = -\int_\Omega w \Delta v \, dx = 0$$

Donc :

$$Q_\gamma(f) = Q_1(f) + \int_\Omega h|\nabla v|^2 \, dx + O((||h||_2 + ||\nabla h||_2)^2)$$

ce qui démontre le résultat.