

TD n°2 : espaces de Sobolev

Dans tout le TD, on suppose qu'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Pour tous $k \in \mathbb{N}, p \in [1;\infty]$, on définit l'espace de Sobolev $W^{k,p}$ par :

$$W^{k,p} = \{f \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ tq } \forall |\alpha| \leq k, f^{(\alpha)} \in L^p(\Omega)\}$$

Dans la définition qui précède, il faut comprendre les dérivées au sens des distributions : $f^{(\alpha)}$ est la dérivée α-ième de la distribution $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \int_\Omega f\phi$.
L'espace $W^{k,p}$ est un espace de Banach si on le munit de la norme suivante :

$$\begin{aligned} ||f||_{k,p} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq k} ||f^{(\alpha)}||_p^p\right)^{1/p} \qquad \text{si } p < +\infty \\ &= \sup_{|\alpha|\leq k} ||f^{(\alpha)}||_\infty \qquad \text{sinon} \end{aligned}$$

Pour $p = 2$, $W^{k,p}$, qu'on notera alors plus simplement H^k, est un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est donné par :

$$\langle f, g\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} \langle f^{(\alpha)}, g^{(\alpha)}\rangle$$

Exercice 1 : approximation par des fonctions lisses

Soit $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que :

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 1 \text{ si } x \in B(0,1) \\ &= 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^n - B(0,2) \end{aligned}$$

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\chi_k : x \in \mathbb{R}^n \to \chi(2^{-k}x) \qquad \text{et} \qquad \eta_k : x \in \mathbb{R}^n \to \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi(2^k u)du\right)^{-1} \chi(2^k x)$$

Par des arguments de théorie de la mesure, on peut vérifier que, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq p < +\infty$, $||f - f \star \eta_k||_p \to 0$ quand $k \to +\infty$.

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $s \in \mathbb{N}$ et $p \in [1;+\infty[$.
Soit $f \in W^{s,p}(\Omega)$. On note $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction qui coïncide avec f sur Ω et vaut 0 sur $\mathbb{R}^n - \Omega$. Pour tout k, on pose $f_k = \chi_k(\underline{f} \star \eta_k)$.
Montrer que $f_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

2. Soit $\omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert tel que $\overline{\omega}$ est compact et inclus dans Ω. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq s$, exprimer $f_k^{(\alpha)}$ en fonction de $f^{(\alpha)}$, sur ω, pour k assez grand.

3. En déduire que, pour tous ω et α comme dans la question précédente, $f^{(\alpha)}_{k|\omega}$ converge vers $f^{(\alpha)}_{|\omega}$ dans $L^p(\omega)$.

Exercice 2 : prolongement

Soit $p \in [1;+\infty]$. Soit $\Omega = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_1 > 0\}$.

1. a) Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. On définit :

$$\begin{aligned} u_*(x_1,...,x_n) &= u(x_1,x_2,...,x_n) && \text{si } x_1 > 0 \\ &= 0 && \text{si } x_1 = 0 \\ &= u(-x_1,x_2,...,x_n) && \text{si } x_1 < 0 \end{aligned}$$

Montrer que $u_* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Calculer $||u_*||_p$ et, pour tout i, $||\partial_i u_*||_p$ en fonction de $||u||_p$ et des $||\partial_i u||_p$.

b) En déduire qu'il existe une application continue $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $E(u)$ et u coïncident sur Ω.

2. Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai si on remplace $W^{1,p}$ par $W^{2,p}$.
[Indication : on posera

$$\begin{aligned} u_{2,*}(x_1,...,x_n) &= u(x_1,x_2,...,x_n) && \text{si } x_1 > 0 \\ &= 0 && \text{si } x_1 = 0 \\ &= -3u(-x_1,x_2,...,x_n) + 4u(-\tfrac{1}{2}x_1,x_2,...,x_n) && \text{si } x_1 < 0 \quad] \end{aligned}$$

De façon plus générale, le résultat reste vrai si on remplace $W^{1,p}$ par $W^{k,p}$, pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque. En perfectionnant le raisonnement, on peut également démontrer le théorème suivant, que nous admettrons :

Théorème 2.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord régulier. Alors, pour tout $p \in [1;+\infty]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une application continue $E : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour toute $u \in W^{k,p}(\Omega)$, u et Eu coïncident sur Ω.*

3. a) En combinant ce théorème avec le résultat de l'exercice précédent, démontrer que si Ω est borné et si $p < +\infty$, alors, pour toute $f \in W^{k,p}(\Omega)$, il existe une suite $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f_l \to f$ dans $W^{k,p}(\Omega)$.

b) Montrer que le résultat précédent est aussi vrai si Ω n'est pas borné.

Exercice 3 : inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Dans cet exercice, on suppose $n \leq 1$.

1. Soient $f_1, ..., f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$$

Montrer que $||f||_1 \leq \prod_{i=1}^n ||f_i||_{n-1}$.
[Indication : procéder par récurrence sur n en posant, pour $i \in \{1, ..., n-1\}$:

$$g_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}) = ||f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, .)||_{n-1}^{(n-1)/(n-2)} \quad]$$

2. Montrer que, si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors :

$$||u||_{n/(n-1)} \leq ||\,|\nabla u|\,||_1$$

3. Montrer que, si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $p \in [1; n[$, alors :

$$||u||_{p^*} \leq C|| \, |\nabla u| \, ||_p$$

pour une certaine constante u ne dépendant que de n et p, où $p^* = np/(n-p)$.
[Indication : appliquer le résultat de la question 2. à $|u|^\gamma$, puis l'inégalité de Hölder, pour $\gamma > 1$ bien choisi.]

4. Montrer que, pour toute $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (avec toujours $p \in [1; n[$) :

$$||u||_{p^*} \leq C|| \, |\nabla u| \, ||_p$$

où C est la même constante qu'à la question 3.

Exercice 4 : injections de Sobolev

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord régulier. Soit $p \in [1; n[$. On définit :*

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

Alors, pour tout $q \in [1; p^*[$, $W^{1,p}(\Omega)$ est inclus dans $L^q(\Omega)$ et l'injection canonique est compacte.

[On rappelle que, si E et F sont deux espaces de Banach et si $A : E \to F$ est une application linéaire, on dit que A est un opérateur *compact* si l'image par A de la boule unité de E est d'adhérence compacte dans F.]

1. Soit Ω un ouvert borné fixé, de bord régulier. Montrer, à l'aide de l'exercice précédent, que, pour tous $p \in [1; n[$ et $q \in [1; p^*]$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ et l'injection canonique est continue.

2. Dans cette question, on suppose fixée une suite bornée $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, dont le support est compact et inclus dans un certain ouvert V borné.
On définit $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme dans l'exercice 1. Quitte à agrandir un peu V, on peut supposer que, pour tous $k, s \in \mathbb{N}^*$, $f_k \star \eta_s$ est à support compact inclus dans V.
a) Soit s fixé. Montrer que la suite $(f_k \star \eta_s)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, uniformément bornée et équicontinue.
b) En déduire qu'il existe une sous-suite de $(f_k \star \eta_s)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $L^q(V)$.
[Indication : on rappelle que, d'après le théorème d'Ascoli, si K est un espace métrique compact, alors un sous-ensemble de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$) est d'adhérence compacte pour la topologie uniforme si et seulement si il est uniformément borné et équicontinu.]
c) Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $L^q(\mathbb{R}^n)$.
[Indication : montrer que $f_k \star \eta_s$ converge vers f_k dans L^1, uniformément en k lorsque s tend vers $+\infty$; montrer ensuite le même résultat dans L^q.]

3. Montrer que l'injection canonique de $W^{1,p}(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$ est compacte.
[Indication : utiliser le théorème vu à l'exercice 2.]

Exercice 5 : inégalité de Poincaré-Sobolev

Démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.1 *Soit Ω un ouvert borné de bord régulier. Soit $p \in [1; +\infty]$. Il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que, pour toute $u \in W^{1,p}(\Omega)$:*

$$||u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u||_p \leq C_\Omega ||\nabla u||_p$$

[Indication : raisonner par l'absurde et utiliser le résultat de l'exercice précédent pour $q = p$.]

Exercice 6 : espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire

Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{D}' \text{ tq } (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

et on munit cet espace de la norme suivante :

$$||f||_{H^s} = ||(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F} f||_2$$

1. Montrer que si $s \in \mathbb{N}$, cette définition est équivalente à celle donnée au début du TD.

2. [Facultatif] Montrer que, pour $s \in]0; 1[$, cette définition est équivalente à :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ tq } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dxdy < +\infty \right\}$$

[Remarque : un raffinement de cette définition permet également de définir des espaces $W^{s,p}(\Omega)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.]

3. Montrer que, pour tout $s > n/2$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est inclus dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (muni de la norme uniforme) et l'injection est continue.

Exercice 7 : traces

Dans cet exercice, on fixe $\Omega = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_1 > 0\}$. Ce choix simplifie les démonstrations mais les résultats démontrés restent vrais lorsque l'ensemble Ω est un ouvert à bord régulier quelconque.

1. a) Soit $p \in [1; +\infty[$. Montrer que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(0, x')|^p dx' \right)^{1/p} \leq C ||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$$

b) Montrer qu'il existe un unique opérateur continu $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que :

$$\forall u \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n) \qquad \gamma(u_{|\Omega}) = u(0, .)$$

2. On définit $W^{1,p}_0(\Omega)$ comme l'adhérence dans $W^{1,p}(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de Ω vers $\mathbb{R}$ à support compact inclus dans Ω).
Montrer que, pour toute $u \in W^{1,p}(\Omega)$, u appartient à $W^{1,p}_0(\Omega)$ si et seulement si $\gamma(u) = 0$.

3. Soit $s > 1/2$. On définit $H^s(\mathbb{R}^n)$ comme à l'exercice précédent et on pose :

$$H^s(\Omega) = \{u_{|\Omega} \text{ tq } u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

avec $||u||_{H^s(\Omega)} = \inf\{||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \text{ tq } u = v_{|\Omega}\}$.
Montrer qu'il existe un unique opérateur continu $\gamma : H^s(\Omega) \to H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que :

$$\forall u \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n) \qquad \gamma(u_{|\Omega}) = u(0, .)$$