École Normale Supérieure
8 octobre 2015

Analyse des équations aux dérivées partielles

TD n°3 : opérateurs pseudo-différentiels et front d'onde

Exercice 1 : commutateurs

Soit $a \in S^m$ un symbole d'ordre m. On définit l'opérateur pseudo-différentiel associé par :

$$\mathrm{Op}(a) : u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \to \quad \left(x \to \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} a(x,\xi) \hat{u}(\xi) d\xi \right)$$

1. On note $[\mathrm{Op}(a), \partial_j]$ le commutateur de $\mathrm{Op}(a)$ et de la dérivée partielle par rapport à la j-ième variable. Montrer qu'il s'agit à nouveau d'un opérateur pseudo-différentiel et calculer son symbole en fonction de a.

2. Même question pour $[\mathrm{Op}(a), x_j]$, où x_j désigne la multiplication par x_j.

Exercice 2 : distributions à support compact

Soit $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ une distribution.
Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on note $u_{|\Omega}$ la restriction de u à $\mathcal{D}(\Omega)$. On dit que u est nulle au voisinage de $x \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un ouvert Ω contenant x tel que $u_{|\Omega} = 0$.
On définit le support de u par :

$$\mathrm{Supp}(u) = \mathbb{R}^n - \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } u \text{ est nulle au voisinage de } x\}$$

On note $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions à support compact.

1. Montrer que les éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ se prolongent à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en des distributions tempérées.

2. Montrer que pour toute $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}u$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à croissance au plus polynomiale.

Exercice 3 : propriétés du front d'onde

On suppose $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ fixée pour la suite de l'exercice.

1. Soit ξ tel que $\hat{u}$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique C_1 de ξ (on dit alors que $\xi \notin \Sigma(u)$).
a) Montrer qu'il existe un voisinage conique C_2 de ξ et une constante c telle que, pour tout $\eta \in C_2$, on ait $||\eta - \zeta|| \leq c||\eta|| \Rightarrow \zeta \in C_1$.
b) Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\widehat{\phi u}$ est à décroissance rapide sur C_2.
c) En déduire que, pour toute $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\Sigma(\phi u) \subset \Sigma(u)$.

2. Montrer que, pour toute $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, pour toute $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a $WF(\phi v) \subset WF(v)$.

3. a) Soient $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $\phi_2 \neq 0$ sur le support de ϕ_1. Montrer que $\Sigma(\phi_1 u) \subset \Sigma(\phi_2 u)$.
b) On définit $\Sigma_x(u)$ comme l'intersection des $\Sigma(\phi u)$, pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$ telles que $\phi(x) = 1$. Dire pourquoi :

$$\Sigma_x(u) = \{\xi \text{ tq } (x,\xi) \in WF(u)\}$$

c) Soit Γ un voisinage conique de $\Sigma_x(u)$. Montrer qu'il existe un nombre fini de $\phi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $\phi_j(x) \neq 0$ telles que $\cap_j \Sigma(\phi_j u) \subset \Gamma$.

d) En déduire qu'il existe un voisinage U de x tel que, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U, \mathbb{R})$, on ait $\Sigma(\phi u) \subset \Gamma$.

Exercice 4 : propagation des singularités pour l'équation des ondes

1. Résoudre l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} &= (0, f) \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est à support compact et $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^n))$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

On définit le support singulier par : $x \notin \mathrm{singsupp}(u)$ s'il existe un voisinage de x sur lequel u est $\mathcal{C}^\infty$ et on définit $\Sigma(f)$ comme à l'exercice 3.

2. On considère une solution u de (1). Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi(\xi) = 1$ pour $||\xi|| \geq 1$ et $\chi = 0$ au voisinage de 0. Vérifier que :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{2i}(u_+ - u_-) + \frac{1}{(2\pi)^n}\int (1-\chi(\xi))\frac{\sin(t||\xi||)}{||\xi||}e^{ix.\xi}\hat{f}(\xi)d\xi$$

où on a noté :

$$u_\pm(t,x) = \int \frac{\chi(\xi)}{||\xi||}e^{i(x.\xi \pm t||\xi||)}\hat{f}(\xi)d\xi$$

3. Montrer que $WF(u(t)) \subset WF(u_+(t)) \cup WF(u_-(t))$.

4. On suppose fixé $t \in \mathbb{R}$ et $x_0 \notin \mathrm{Supp}(f) - t\Sigma_1(f)$, où $\Sigma_1(f) = \Sigma(f) \cap \{||\xi|| = 1\}$. Soit U un voisinage de x_0 et Γ un voisinage conique de $\Sigma(f)$ tels que :

$$U \cap (\mathrm{Supp}(f) - t\Gamma_1) = \emptyset$$

où on a noté $\Gamma_1 = \Gamma \cap \{||\xi|| = 1\}$. On introduit ψ homogène de degré 0 telle que $\psi = 1$ sur un voisinage conique de $\Sigma(f)$ et $\psi(\xi) = 0$ pour $\xi \notin \Gamma$. On écrit $u_+ = u_+^1 + u_+^2$ où :

$$u_+^1(t,x) = \int \frac{\psi(\xi)\chi(\xi)}{||\xi||}e^{i(x.\xi + t||\xi||)}\hat{f}(\xi)d\xi$$

$$u_+^2(t,x) = \int \frac{(1-\psi(\xi))\chi(\xi)}{||\xi||}e^{i(x.\xi + t||\xi||)}\hat{f}(\xi)d\xi$$

Montrer que $\mathrm{singsupp}(u_+) = \mathrm{singsupp}(u_+^1)$.

5. En utilisant la relation

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j - y_j + t\frac{\xi_j}{||\xi||}}{i\left|x - y + t\frac{\xi}{||\xi||}\right|^2}\partial_j e^{i((x-y).\xi + t||\xi||)} = e^{i((x-y).\xi + t||\xi||)}$$

montrer que $u_+^1 \in \mathcal{C}^\infty(U)$. En déduire $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u_+(t))$.

6. En déduire le « théorème de propagation des singularités » suivant :

$$\mathrm{singsupp}(u(t)) \subset \cup_{(x,\xi)\in WF(f)} \left(x \pm t\frac{\xi}{||\xi||}\right)$$