TD n^{o}4 : calcul symbolique

Exercice 0

Soit $a \in S^m_{\rho,0}$ pour un certain $m \in \mathbb{R}$ et un $\rho \in [0;1]$. On suppose qu'il existe $k < m$ tel que, pour tous α, β, il existe $R, C > 0$ vérifiant :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C(1+||\xi||)^{k-|\beta|} \qquad \text{si } ||\xi|| \geq R$$

Montrer que a appartient à S^k.

Exercice 1 : somme asymptotique de symboles

Soit $(m_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite strictement décroissante d'entiers telle que $m_j \to -\infty$ quand $j \to +\infty$. Pour tout j, soit $a_j \in S^{m_j}$. Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de 0.

1. Montrer qu'il existe une suite $\epsilon_j \to 0$ telle que, pour tous α, β si on pose $\tilde{a}_j = (1-\chi(\epsilon_j\xi))a_j$, on a, pour tout j assez grand :

$$\forall x, \xi \qquad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}_j| \leq \frac{1}{2^j}(1+||\xi||)^{1+m_j-|\beta|}$$

2. On pose $a = \sum_{j\in\mathbb{N}} \tilde{a}_j$. Montrer que cela définit bien une fonction $\mathcal{C}^\infty$.
3. Montrer que, pour tout k, $a - \sum_{j<k} a_j \in S^{m_k}$.

Exercice 2 : inversion des opérateurs elliptiques

Soit $a \in S^m$.

1. Soient $b, b' \in S^{-m}$ tels que $\mathrm{Op}(a)\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ et $\mathrm{Op}(b')\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$. Montrer que $\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(b') \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.
2. On suppose qu'il existe $b \in S^{-m}$ tel que $\mathrm{Op}(a)\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$. Montrer qu'il existe $C, R > 0$ tels que :

$$\forall ||\xi|| \geq R \qquad |a(x,\xi)| \geq C(1+||\xi||^2)^{m/2} \tag{1}$$

3. On suppose que a vérifie (1). Soit $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ telle que $F(z) = z^{-1}$ pour $|z| \geq C$. On pose :

$$b(x,\xi) = \frac{1}{(1+||\xi||^2)^{m/2}} F(a(x,\xi)(1+||\xi||^2)^{-m/2})$$

Montrer que $b \in S^{-m}$ et qu'on peut écrire $\mathrm{Op}(a)\mathrm{Op}(b) = \mathrm{Id} - R$ avec $R \in \mathrm{Op}(S^{-1})$.

4. Construire $B \in Op(S^{-m})$ tel que :

$$\mathrm{Op}(a)B - \mathrm{Id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$$

Construire de même un inverse à gauche.
[Indication : on pourra utiliser l'exercice 1.]

Exercice 3 : opérateurs locaux

Soit P un opérateur pseudo-différentiel local, c'est-à-dire que, pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathrm{Supp}(Pu) \subset \mathrm{Supp}(u)$.

1. Supposons P d'ordre $m < -n/2$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_k \to u$ dans L^2 et $u_k = 0$ au voisinage de x_0. En déduire $Pu(x_0) = 0$.
[Indication : utiliser le fait que, pour $s > n/2$, H^s est inclus dans $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)$, avec injection continue.]

2. Supposons P d'ordre $m < 0$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $P^k = 0$. En déduire que $P = 0$.
[Indication : utiliser la question 3. a) de l'exercice 4.]

3. Supposons P d'ordre $m < k \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que, pour tout x_0, la distribution $u \to Pu(x_0)$ est une combinaison linéaire finie de $\delta^{(i)}$ (où, pour tout multi-indice i, $\delta^{(i)}$ désigne ici la dérivée partielle i fois au point x_0).
b) Montrer que le nombre de i qui interviennent dans la combinaison linéaire lorsque x_0 varie est borné.
[Indication : réutiliser une partie du raisonnement de la question 1.]
c) En déduire que $P = \sum_{|\alpha|\leq k-1} a_\alpha(x) D^\alpha$, avec $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 4 : opérateurs pseudo-différentiels nilpotents

1. Soient $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. On suppose que :

$$\chi(\xi) \neq 0 \qquad \iff \qquad 1/2 < ||\xi|| < 2$$

Pour tout $\lambda \geq 1$, on pose $a_\lambda(x, \xi) = \chi(\xi)a(x, \lambda\xi)$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

1. $a \in S^m$
2. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C > 0$ tel que $\forall\lambda \geq 1, ||\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_\lambda||_\infty \leq C\lambda^m$.

2. a) Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$. On suppose que f est bornée et $\partial^\alpha f$ aussi, pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| = k$. Montrer qu'il existe une constante C indépendante de f telle que, pour tout β vérifiant $0 \leq |\beta| \leq k$:

$$||\partial^\beta f||_\infty \leq C \left(||f||_\infty + \sum_{|\alpha|=k} ||\partial^\alpha f||_\infty \right)$$

b) Montrer que, pour tout β vérifiant $0 \leq |\beta| \leq k$:

$$||\partial^\beta f||_\infty \leq C||f||_\infty^{1-|\beta|/k} \left(\sum_{|\alpha|=k} ||\partial^\alpha f||_\infty \right)^{|\beta|/k}$$

[Indication : considérer la fonction $g : x \to f(\lambda x)$ pour un λ bien choisi.]
c) Soit $a \in S^m$. On suppose qu'il existe $\mu < m$ et $C > 0$ tels que, pour tous x, ξ, $|a(x, \xi)| \leq C(1 + ||\xi||)^\mu$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $a \in S^{\mu+\epsilon}$.
[Indication : utiliser la question 1.]

3. a) Soit A un opérateur pseudo-différentiel nilpotent (c'est-à-dire tel que $A^k = 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$). Montrer que $A \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.
b) Donner un exemple non trivial d'un tel opérateur pour $k = 2$.