École Normale Supérieure
22 octobre 2015

TD n$^{\text{o}}$5 : calcul symbolique et intégrales oscillantes

Exercice 1 : lemme de Schur
Soit $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $A > 0$ tel que :

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int |K(x,y)|dx \leq A \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int |K(x,y)|dy \leq A$$

Pour toute $u \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, on pose :

$$Pu(x) = \int K(x,y)u(y)dy$$

1. Montrer que Pu est bien définie et appartient à L^∞.

2. On va montrer que P se prolonge de manière unique en un opérateur continu de L^2 dans L^2, qui vérifie :

$$||Pu||_2 \leq A||u||_2$$

a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que, pour toute u et pour tout x :

$$|Pu(x)|^2 \leq A \int |K(x,y)|\,|u(y)|^2 dy$$

b) Conclure.

Exercice 2 : continuité sur L^2 d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0
Dans cet exercice, on donne une nouvelle démonstration du théorème suivant.

Théorème 2.1 *Soit $a \in S^0(\mathbb{R}^n)$. Alors $Op(a)$ s'étend en un opérateur continu de L^2 vers L^2.*

1. On commence par supposer $a \in S^{-(n+1)}$.
a) Montrer que $\mathrm{Op}(a)$ s'écrit sous la forme $\mathrm{Op}(a)u(x) = \int K(x,y)u(y)dy$ pour un *noyau* K qu'on calculera.
b) Montrer que $(1 + ||x-y||^{n+1})K(x,y)$ est une fonction bornée.
c) Démontrer le théorème à l'aide du lemme de Schur.

2. Montrer par récurrence sur $k \in \{0, ..., n\}$ que le théorème est vrai si $a \in S^{k-(n+1)}$.
[Indication : utiliser l'identité $||T^*T||_{L^2\to L^2} = ||T||^2_{L^2\to L^2}$.]

3. La question précédente démontre en particulier le théorème lorsque $a \in S^{-1}$.
On suppose maintenant $a \in S^0$.

a) Montrer que si $M > 0$ est assez grand, il existe un symbole $c \in S^0(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\mathrm{Op}(c)^*\mathrm{Op}(c) = M\mathrm{Id} - \mathrm{Op}(a)^*\mathrm{Op}(a) + R$$

avec $R \in \mathrm{Op}(S^{-1})$.
b) Conclure.

Exercice 3 : réciproque partielle de l'exercice précédent

Soit a un symbole. On suppose que $\mathrm{Op}(a)$ s'étend en un opérateur continu de L^2 vers L^2.

1. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, a appartient à S^ϵ.
[Indication : on utilisera un résultat contenu dans le TD de la semaine dernière : si un symbole $a \in S^m$ vérifie $a(x,\xi) \leq C(1+||\xi||)^\mu$ pour un certain $\mu < m$, alors $a \in S^{\mu+\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$. On pourra estimer $\langle \phi^h_{p,q}, \mathrm{Op}(a)\phi^h_{p,q}\rangle$, pour $\phi^h_{p,q}$ défini comme dans le cours sur la transformée en paquets d'onde.]
2. En considérant le symbole $a : (x,\xi) \to e^{i\log(1+||\xi||^2)^2}$, montrer qu'on n'a pas nécessairement $a \in S^0$.

Exercice 4 : calculs d'intégrales oscillantes

1. Soit $a \in A^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Montrer que, pour tout j :

$$\int e^{-iy.x} x_j a(x,y)dxdy = -i\int e^{-iy.x}\partial_{y_j} a(x,y)dxdy$$

2. Soit $a \in A^m(\mathbb{R}^n)$. Montrer que :

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}a(y)dydx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}a(x)dydx = a(0)$$

3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Montrer que :

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}\,\frac{y^\alpha x^\beta}{\alpha!\beta!}dydx = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

Exercice 5 : restriction à S^{n-1} de la transformée de Fourier

On admet le théorème suivant.

Théorème 5.1 *Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe j_1, j_2 tels que $\partial_{j_1}\partial_{j_2}\Phi \neq 0$ sur le support de ψ. Alors, pour tout $\lambda \geq 1$:*

$$\left|\int e^{i\lambda\Phi(x)}\psi(x)dx\right| \leq c(\Phi)\lambda^{-1/2}$$

où, lorsque ψ est fixée, $c(\Phi)$ reste bornée si la norme de Φ dans $\mathcal{C}^3$ reste bornée.

1. Soit ψ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur la sphère $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. On montre dans cette question que, si le support de ψ est de diamètre assez petit, alors il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \int_{S^{n-1}} \psi(x) e^{-ix.\xi} dx \leq C(1 + ||\xi||)^{-1/2} \tag{1}$$

a) Montrer qu'on peut supposer que le support de ψ contient $(0, ..., 0, 1)$ et est inclus dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$. On suppose dans la suite ces hypothèses vérifiées.

b) Montrer qu'il existe $\tilde{\psi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \int_{S^{n-1}} \psi(x) e^{-ix.\xi} dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{\psi}(x) e^{-i\phi(x).\xi} dx \tag{2}$$

où on a posé $\phi : (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \to \frac{(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 1)}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 + 1}}$.

c) Soit ξ_0 non-colinéaire à $(0, ..., 0, 1)$. Montrer qu'il existe un voisinage conique de ξ_0 sur lequel, si le support de ψ est assez petit, alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_{S^{n-1}} \psi(x) e^{-ix.\xi} dx \leq C_N (1 + ||\xi||)^{-N} \tag{3}$$

[Indication : utiliser le lemme de la phase non-stationnaire avec la phase $\Phi(x) = \phi(x).\xi / ||\xi||$ et $\lambda = ||\xi||$.]

d) Soit maintenant $\xi_0 = \pm(0, ..., 0, 1)$. Montrer qu'il existe un voisinage conique de ξ_0 sur lequel, si le support de ψ est assez petit, (1) est vérifiée.

[Indication : utiliser le théorème admis.]

e) Conclure.

2. À l'aide de la question précédente, montrer que pour toute fonction $\psi : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \int_{S^{n-1}} \psi(x) e^{-ix.\xi} dx \leq C(1 + ||\xi||)^{-1/2}$$

3. Dans cette question, on démontre le théorème suivant.

Théorème 5.2 *Pour tout $p \geq 1$ assez proche de 1, l'application $R : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \hat{f}_{|S^{n-1}} \in \mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$ se prolonge en une application continue de $L^p(\mathbb{R}^n)$ vers $L^2(S^{n-1})$.*

a) Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $||Rf||_2^2 = \langle R^* R f, f \rangle$ où :

$$R^* : g \in \mathcal{C}^\infty(S^{n-1}) \to \left(R^* g : x \to \int_{S^{n-1}} e^{ix.\xi} g(\xi) d\xi \right)$$

b) Montrer qu'il existe une fonction $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, ||K(x)|| \leq C(1 + ||x||)^{-1/2}$ et, pour toute f, $R^* R f = f \star K$.

c) En déduire que, pour tout p assez proche de 1, $R^* R$ se prolonge en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}^n)$ vers $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ (où p' est l'exposant conjugé de p).

[Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Young : $||a \star b||_p \leq ||a||_q ||b||_r$ si $1 + 1/p = 1/q + 1/r$.]

d) Démontrer le théorème.