TD n$^{\text{o}}$6 : opérateurs pseudo-différentiels

Théorème. *Soit $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Il existe $a^* \in S^m(\mathbb{R}^n)$ tel que, pour toutes $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\langle \mathrm{Op}(a)u, v\rangle = \langle u, \mathrm{Op}(a^*)v\rangle$$

On a de plus le développement asymptotique $a^* \sim \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!}\partial_\xi^\alpha \partial_x^\alpha \overline{a}$.

Théorème. *Soient $a \in S^{m_1}(\mathbb{R}^n), b \in S^{m_2}(\mathbb{R}^n)$. Il existe $a\#b \in S^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n)$ tel que :*

$$\mathrm{Op}(a) \circ \mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(a\#b)$$

On a de plus le développement asymptotique $a\#b \sim \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!}(\partial_\xi^\alpha a)(\partial_x^\alpha b)$.

Remarque. *Le premier théorème permet d'étendre $\mathrm{Op}(a)$ en un opérateur de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vers $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En effet, pour toute $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on peut définir :*

$$\forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \qquad \langle \mathrm{Op}(a)u, v\rangle = \langle u, \mathrm{Op}(a)^* v\rangle$$

(où l'on note, pour toute distribution T, $\langle T, v\rangle = \overline{T(\overline{v})}$)

Exercice 1

Soit $a \in S^m$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|a(x,\xi)| \geq C(1 + ||\xi||)^m$$

On a vu dans un précédent TD qu'il existait $b \in S^{-m}$ vérifiant :

$$\mathrm{Op}(a) \circ \mathrm{Op}(b) = \mathrm{Id} + R \qquad \text{avec } R \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$$

Trouver $b_1 \in S^{-m}, b_2 \in S^{-m-1}$ tels que $b - (b_1 + b_2) \in S^{-m-2}$.

Exercice 2 : régularité du noyau en-dehors de la diagonale

Soit $a \in S^m$, pour un certain $m \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler l'expression du noyau de $\mathrm{Op}(a)$.
2. Montrer que, si $m = -\infty$, alors le noyau est $\mathcal{C}^\infty$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$. Soient $\phi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que :
    1. ϕ vaut 1 au voisinage de x.
    2. ψ vaut 1 au voisinage de y.
    3. $\mathrm{Supp}(\phi) \cap \mathrm{Supp}(\psi) = \emptyset$.

Montrer que $M_\phi \operatorname{Op}(a) M_\psi$ appartient à $\operatorname{Op}(S^{-\infty})$ (où M_ϕ et M_ψ désignent respectivement les multiplications par ϕ et ψ).

4. Calculer le noyau de $M_\phi \operatorname{Op}(a) M_\psi$ en fonction du noyau de $\operatorname{Op}(a)$.

5. Montrer que le noyau de $\operatorname{Op}(a)$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de (x, y).

Exercice 3 : symboles locaux

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, on appelle $S^m_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $a : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que, pour toute $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, ϕa appartient à $S^m(\mathbb{R}^n)$.

1. Pour toute $a \in S^m_{loc}(\Omega)$, on définit, pour toute fonction u « convenable » :

$$\forall x \in \Omega \qquad \operatorname{Op}_\Omega(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi) d\xi$$

a) Montrer que cette formule définit un opérateur de $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ vers $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

b) Pour toute $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, on note $M_\phi : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur qui, à u, associe ϕu (prolongée par 0 en-dehors de Ω).

Montrer que, pour toute $v \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, si $\phi, \tilde{\phi} \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ valent 1 sur le support de v, alors :

$$(\operatorname{Op}(\phi a))^* v = (\operatorname{Op}(\tilde{\phi} a))^* v$$

c) En déduire qu'on peut étendre $\operatorname{Op}_\Omega(a)$ en un opérateur de $\mathcal{S}'(\Omega)$ vers $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2. On suppose que $A : \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est un opérateur linéaire vérifiant la propriété suivante : pour toutes $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, $M_\phi A M_\psi$ appartient à $\operatorname{Op}(S^m)$.

On va montrer qu'il existe $a \in S^m_{loc}(\Omega)$ tel que $A = \operatorname{Op}_\Omega(a) + R$, pour un certain opérateur R de la forme :

$$Ru : x \in \Omega \to \int_\Omega K(x,y)u(y)dy$$

avec $K \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega)$.

On admet l'existence d'une *partition de l'unité* de Ω, c'est-à-dire une suite $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. pour tout $K \subset \Omega$ compact, $\{j \text{ tq } \operatorname{Supp}(\psi_j) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.
2. pour tout $x \in \Omega$, $\sum_j \psi_j(x) = 1$.

a) Montrer que, pour toute $u \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, cela a un sens d'écrire :

$$Au = \sum_{j,k\in\mathbb{N}} A_{jk} u$$

où on a noté $A_{jk} = M_{\psi_j} A M_{\psi_k}$.

b) On note $I = \{(j,k) \text{ tq } \operatorname{Supp}(\psi_j) \cap \operatorname{Supp}(\psi_k) \neq \emptyset\}$. Montrer que $\sum_{(j,k)\in I} A_{jk}$ est de la forme $\operatorname{Op}_\Omega(a)$ avec $a \in S^m_{loc}(\Omega)$.

c) Montrer que, pour tout $(j,k) \notin I$, A_{jk} est un opérateur à noyau $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que le support du noyau est inclus dans $\operatorname{Supp}(\psi_j) \times \operatorname{Supp}(\psi_k)$.

[Indication : utiliser l'exercice 2.]

d) Démontrer le résultat voulu.

Exercice 4 : paramétrice d'un problème elliptique

Soit $P(\xi)$ un polynôme en ξ, de degré m, à n variables, tel qu'il existe $R, C > 0$ tels que :

$$|P(\xi)| \geq C||\xi||^m \qquad \forall ||\xi|| \geq R$$

On dit alors que l'opérateur $P(D)$ est elliptique.

1. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi = 1$ sur $B(0, R)$. Montrer que, pour toute $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'intégrale suivante a un sens (au sens des intégrales oscillantes) :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} u(x) dx d\xi$$

2. Soit U un ouvert borné ne contenant pas 0. On considère la distribution T sur $\mathcal{D}(U)$ définie par :

$$T(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} u(x) dx d\xi$$

Montrer que T s'identifie à une fonction de $L^2(U)$.

3. Montrer de même que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha T$ s'identifie à une fonction de $L^2(U)$. En déduire que, sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\})$, T s'identifie à une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$.

4. Montrer qu'on a $P(D)T = \delta_0 + r$ avec $r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. La distribution T est appelée *paramétrice* de $P(D)$.

5. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver une paramétrice de $P(D)$ à support dans $B(0, \epsilon)$.