Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$6

Corrigé

Exercice 1

On a $\mathrm{Id} + R = \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(ab) + \mathrm{Op}(r)$ avec $r \in S^{-1}$, donc :

$$\mathrm{Op}(ab - 1) \in \mathrm{Op}(S^{-1})$$

ce qui entraîne $b - 1/a \in S^{-m-1}$, puisque $1/a \in S^{-m}$.
On pose $b' = b - 1/a \in S^{-m-1}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id} + R &= \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(1/a + b') \\
&= \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(1/a) + \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b') \\
&= \mathrm{Op}\left(1 + \frac{1}{i}\sum_j (\partial_{\xi_j} a)(\partial_{x_j}(1/a)) + ab'\right) + S \\
&= \mathrm{Op}\left(1 - \frac{1}{ia^2}\sum_j (\partial_{\xi_j} a)(\partial_{x_j} a) + ab'\right) + S
\end{aligned}$$

pour un $S \in S^{-2}$.
On a donc :

$$b' = \frac{1}{ia^3}\sum_j (\partial_{\xi_j} a)(\partial_{x_j} a) + r$$

avec $r \in S^{-m-2}$.
Il suffit alors de poser $b_1 = 1/a$ et $b_2 = \frac{1}{ia^3}\sum_j (\partial_{\xi_j} a)(\partial_{x_j} a)$.

Exercice 2

1. $K(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}} a(x,\xi) e^{i(x-y).\xi} d\xi$
En intégrant par parties, on peut donner un sens à cette intégrale pour tout (x,y) tel que $x \neq y$.
2. Pour tous multi-indices α et β, la fonction $(x,y,\xi) \to a(x,\xi)e^{i(x-y).\xi}$ est (α,β)-fois dérivable par rapport à (x,y). De plus, la dérivée (α,β)-ème est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\partial_x^\gamma a(x,\xi)\xi^{(\alpha-\gamma)+\beta} e^{i(x-y).\xi}$$

avec $\gamma \leq \alpha$.

Puisque $a \in S^{-\infty}$, une telle combinaison linéaire est majorée par $C(1+||\xi||)^{-(n+1)}$ pour une certaine constante C, ce qui est une fonction intégrable en ξ.
On peut donc dériver sous le signe somme et K est $\mathcal{C}^\infty$.
3. D'après le deuxième théorème, $\mathrm{Op}(a)M_\psi = \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(\psi)$ est de la forme $\mathrm{Op}(c)$ avec :

$$c \sim \sum_\alpha (\partial_\xi^\alpha a)(\partial^\alpha \psi)$$

Chaque terme de ce développement asymptotique est à support dans $\mathrm{Supp}(\psi) \times \mathbb{R}^n$. On en déduit qu'il existe $b \in S^m$ et $R \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ tels que $b(x,\xi) = 0$ pour tout (x,ξ) tel que $x \notin \mathrm{Supp}(\psi)$ et :

$$\mathrm{Op}(a)M_\psi = \mathrm{Op}(b) + R$$

On a de même $M_\phi\,\mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(c)$ avec :

$$c \sim \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!}(\partial_\xi^\alpha \phi)(\partial_x^\alpha b)$$

Pour tout α, $(\partial_\xi^\alpha \phi)(\partial_x^\alpha b) = 0$, puisque, pour tout ξ, $\mathrm{Supp}\,(\partial_x^\alpha b(.,\xi)) \subset \mathrm{Supp}(\psi)$ et $\mathrm{Supp}\left(\partial_\xi^\alpha \phi(.,\xi)\right) \subset \mathrm{Supp}(\phi)$ et les deux supports sont donc disjoints.
Cela entraîne $c \in S^{-\infty}$. Donc $M_\phi\,\mathrm{Op}(b) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ et $M_\phi\,\mathrm{Op}(a)M_\psi = M_\phi\,\mathrm{Op}(b) + M_\phi R \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.
4. On note $K(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}} a(x,\xi)e^{i(x-y).\xi}d\xi$ le noyau de $\mathrm{Op}(a)$ et K' le noyau de $M_\phi\,\mathrm{Op}(a)M_\psi$.
Intuitivement, pour une fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} K'(x,y)u(y)dy &= M_\phi\,\mathrm{Op}(a)M_\psi u(x) \\
&= \phi(x)\,\mathrm{Op}(a)(\psi u)(x) \\
&= \phi(x)\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\psi(y)u(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\phi(x)K(x,y)\psi(y)\right)u(y)dy
\end{aligned}$$

donc on s'attend à avoir $K'(x,y) = \phi(x)K(x,y)\psi(y)$. Justifions maintenant rigoureusement ce résultat.
On note $b \in S^m$ le symbole tel que $\mathrm{Op}(a)M_\psi = \mathrm{Op}(b)$. En utilisant le fait que, pour toutes fonctions f_1, f_2, $\widehat{f_1 f_2} = (2\pi)^{-n}\hat{f}_1 \star \hat{f}_2$, on a, si u est de Schwartz :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^n}\int b(x,\xi)e^{ix.\xi}\hat{u}(\xi)d\xi &= \mathrm{Op}(a)M_\psi u(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int a(x,\xi')e^{ix.\xi'}\widehat{\psi u}(\xi')d\xi' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int a(x,\xi')e^{ix.(\xi'-\xi)}e^{ix.\xi}\hat{\psi}(\xi'-\xi)\hat{u}(\xi)d\xi' d\xi
\end{aligned}$$

ce qui fait qu'on a :

$$b(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} a(x,.) \star (e^{-ix\cdot}\hat{\psi}(-.))(\xi)$$

En notant K'' le symbole de b, on a $K''(x,y) = \mathcal{F}^{-1}(b(x,.))(x-y)$ donc :

$$\begin{aligned}K''(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}(a(x,.))(x-y)\mathcal{F}^{-1}(e^{-ix\cdot}\hat{\psi}(-.))(x-y)\\ &= K(x,y)\psi(y)\end{aligned}$$

Un raisonnement similaire (mais nettement plus simple) montre qu'on a aussi $K'(x,y) = \phi(x)K''(x,y)$, ce qui démontre bien :

$$K'(x,y) = \phi(x)K(x,y)\psi(y)$$

5. D'après la question 3., K' est le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-\infty$. D'après la question 2., c'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Puisque K est égal à K' au voisinage de (x,y), K est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de (x,y).

Exercice 3

1. a) Soit $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Comme c'est une fonction de la classe de Schwartz, $\phi\,\mathrm{Op}_\Omega(a)u = \mathrm{Op}(\phi a)u$ est une fonction de la classe de Schwartz pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Donc $\mathrm{Op}_\Omega(a)u$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.
b) $\mathrm{Op}(\phi\tilde{\phi}a)^*v = (M_\phi\,\mathrm{Op}(\tilde{\phi}a))^*v = (\mathrm{Op}(\tilde{\phi}a))^*M_\phi^*v = (\mathrm{Op}(\tilde{\phi}a))^*(\overline{\phi}v) = (\mathrm{Op}(\tilde{\phi}a))^*v$
De même $(\mathrm{Op}(\phi\tilde{\phi}a))^*v = (M_{\tilde{\phi}}\,\mathrm{Op}(\phi a))^*v = (\mathrm{Op}(\phi a))^*v$. Cela entraîne l'égalité demandée.
c) Soit $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$. On définit $\mathrm{Op}_\Omega(a)u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$\forall v \in \mathcal{C}_c(\Omega) \qquad \langle \mathrm{Op}_\Omega(a)u, v\rangle = \langle u, (\mathrm{Op}(\phi a))^*v\rangle$$

où ϕ est une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ valant 1 sur le support de v.
Cette définition ne dépend pas du choix de ϕ, d'après la question précédente. Les propriétés de continuité de $(\mathrm{Op}(\phi a))^*$ font que cela définit bien une distribution.
De plus, on vérifie que cette définition coïncide avec la précédente pour $u \in \mathcal{C}_c(\Omega)$.
2. a) Soit $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.
Soit K l'ensemble (fini) des indices k tels que $\mathrm{Supp}(u) \cap \mathrm{Supp}(\psi_k) \neq \emptyset$. On a $u = \sum_{k\in K} \psi_k u$ donc $Au = \sum_{k\in K} AM_{\psi_k}u$.
Soit $x \in \Omega$ fixé. Soit J l'ensemble (fini) des indices j tels que $x \in \mathrm{Supp}(\psi_j)$. Alors :

$$\begin{aligned}Au(x) &= \sum_{j\in J} \psi_j(x)Au(x)\\ &= \sum_{j\in J, k\in K} (M_{\psi_j}AM_{\psi_k})u(x)\\ &= \sum_{j\in J, k\in K} A_{jk}u(x)\end{aligned}$$

Si $j \notin J$ ou $k \notin K$, $A_{jk}u(x) = 0$, donc :

$$Au(x) = \sum_{j,k\in\mathbb{N}} A_{jk}u(x)$$

b) Par hypothèse, pour tous j, k, A_{jk} est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m, c'est-à-dire qu'il existe un symbole $a_{jk} \in S^m$ tel que $A_{jk} = \mathrm{Op}(a_{jk})$.
Pour tout $x \notin \mathrm{Supp}(\psi_j)$, $a_{jk}(x, .) = 0$ (puisque $A_{jk}u(x) = 0$ pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).
Si on pose $a = \sum_{(j,k)\in I} a_{jk}$, l'opérateur a est bien défini puisqu'en chaque point, la somme est finie. De plus, pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\phi a_{jk} = 0$ pour tout $(j, k) \in I$ sauf un nombre fini. Donc ϕa est une somme finie de symboles d'ordre m, ce qui entraîne que ϕa est un symbole d'ordre m.
Donc $a \in S^m_{loc}(\Omega)$.
Il faut maintenant vérifier qu'avec cette définition, on a bien $\sum_{(j,k)\in I} A_{jk} = \mathrm{Op}_\Omega(a)$.
Pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\phi \sum_{(j,k)\in I} A_{jk}u &= \sum_{\substack{(j,k)\in I \\ \mathrm{Supp}(\psi_j)\cap\mathrm{Supp}(\phi)\neq\emptyset}} \phi A_{jk}u \\
&= \sum_{\substack{(j,k)\in I \\ \mathrm{Supp}(\psi_j)\cap\mathrm{Supp}(\phi)\neq\emptyset}} \phi\, \mathrm{Op}(a_{jk})u \\
&= \mathrm{Op}\left(\phi \sum_{\substack{(j,k)\in I \\ \mathrm{Supp}(\psi_j)\cap\mathrm{Supp}(\phi)\neq\emptyset}} a_{jk}\right)u \\
&= \mathrm{Op}(\phi a)u \\
&= \phi\, \mathrm{Op}_\Omega(a)u
\end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour toute fonction ϕ, $\sum_{(j,k)\in I} A_{jk}u = \mathrm{Op}_\Omega(a)u$.
c) De même qu'à la question 3. de l'exercice 2., $M_{\psi_j} A M_{\psi_k} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ si $\mathrm{Supp}(\psi_j)\cap\mathrm{Supp}(\psi_k) = \emptyset$. D'après la question 2. de l'exercice 2., c'est donc un opérateur à noyau $\mathcal{C}^\infty$.
Notons K le noyau et montrons qu'il est à support inclus dans $\mathrm{Supp}(\psi_j) \times \mathrm{Supp}(\psi_k)$.
Pour tout $x \notin \mathrm{Supp}(\psi_j)$, pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $A_{jk}u(x) = 0$ donc :

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)u(y)dy = 0$$

C'est équivalent à $K(x, y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Donc $\mathrm{Supp}(K) \subset \mathrm{Supp}(\psi_j) \times \mathbb{R}^n$.
Montrons maintenant que $K(x, y) = 0$ pour tous x, y tels que $y \notin \mathrm{Supp}(\psi_k)$.
Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas : $K(x, y) \neq 0$ pour un certain $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $y \notin \mathrm{Supp}(\psi_k)$. Alors il existe une fonction u, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support inclus dans un voisinage arbitrairement petit de y, telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)u(y)dy \neq 0$$

On a alors $A_{jk}u(x) \neq 0$. Mais, si le support de u est assez petit, $\mathrm{Supp}\, u \cap \mathrm{Supp}(\psi_k) = \emptyset$ et $A_{jk}u = M_{\psi_j} A(\psi_k u) = M_{\psi_j} A(0) = 0$. C'est absurde.

d) Pour tout $(j,k) \notin I$, notons K_{jk} le noyau de A_{jk}. Comme $\mathrm{Supp}(K_{jk}) \subset \mathrm{Supp}(\psi_j) \times \mathrm{Supp}(\psi_k)$, la somme $K = \sum_{(j,k)\notin I} K_{jk}$ est bien définie (chaque point admet un voisinage sur lequel seul un nombre fini de termes sont non-nuls) ; elle est $\mathcal{C}^\infty$.
On vérifie également que, pour toute fonction $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\left(\sum_{(j,k)\notin I} A_{jk}\right) u = \int_{\mathbb{R}^n} K(.,y)u(y)dy$.
Cela implique que $\sum_{(j,k)\notin I} A_{jk}$ est un opérateur à noyau $\mathcal{C}^\infty$.
En posant $R = \sum_{(j,k)\notin I} A_{jk}$ et en définissant a comme à la question b), on a bien, d'après la question a) :

$$A = \sum_{(j,k)\in I} A_{jk} + \sum_{(j,k)\notin I} A_{jk} = \mathrm{Op}_\Omega(a) + R$$

Exercice 4

1. On va montrer que $b : (x,\xi) \to \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} u(x)$ appartient à A^{-m}.
Soient α et β des multi-indices.

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha \left(\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}\right) \partial_x^\beta u(x)$$

Le premier terme du produit est majoré par $C(1+||\xi||)^{-m-|\alpha|}$ pour une certaine constante $C > 0$ (à cause de la condition d'ellipticité). Le deuxième est majoré par $C_k(1+||x||)^k$ pour tout k, puisque u est à support compact.
Cela implique en particulier que, pour une certaine constante C' :

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b(x,\xi) \le C'(1+||x||+||\xi||)^{-m}$$

2. Pour tout s et pour toute u à support dans U :

$$\begin{aligned} T(u) &= \frac{(-1)^s}{(2\pi)^n} \int (-1)^s (x_1^2+...+x_n^2)^s e^{ix.\xi} \frac{u(x)}{(x_1^2+...+x_n^2)^s} \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} dx d\xi \\ &= \frac{(-1)^s}{(2\pi)^n} \int (\partial_{\xi_1}^2+...+\partial_{\xi_n}^2)^s \left[e^{ix.\xi} \frac{u(x)}{(x_1^2+...+x_n^2)^s}\right] \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} dx d\xi \\ &= \frac{(-1)^s}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \frac{u(x)}{(x_1^2+...+x_n^2)^s} (\partial_{\xi_1}^2+...+\partial_{\xi_n}^2)^s \left[\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}\right] dx d\xi \end{aligned}$$

La fonction $(1-\chi)P^{-1}$ appartient à S^{-m} donc, pour tout s assez grand, $(\partial_{\xi_1}^2+...+\partial_{\xi_n}^2)^s \left[\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}\right]$ est intégrable.
On pose alors, pour tout $x \in U$:

$$t(x) = \frac{(-1)^s}{(x_1^2+...+x_n^2)^s} \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} (\partial_{\xi_1}^2+...+\partial_{\xi_n}^2)^s \left[\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}\right] d\xi$$

La fonction t est bornée sur U ; elle appartient donc à $L^2(U)$. De plus, pour toute $u \in \mathcal{D}(U)$:

$$T(u) = \int u(x)t(x)dx$$

3. On a, pour toute fonction u :

$$\begin{aligned}\partial^\alpha T(u) &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}\partial^\alpha u(x)dxd\xi \\ &= \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}\xi^\alpha\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}u(x)dxd\xi\end{aligned}$$

ce qui s'identifie à une fonction de $L^2(U)$ pour la même raison que précédemment.
Sur tout ouvert borné U ne contenant pas 0, T s'identifie à une fonction L^2, qui admet des dérivées L^2 à tout ordre ; T s'identifie donc à une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, T s'identifie donc à une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

4.

$$\begin{aligned}P(D)Tu &= T(P(-D)u) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}\left[P(-D)u\right](x)dxd\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int P(D_x)\left[e^{ix.\xi}\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}\right]u(x)dxd\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}P(\xi)\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}u(x)dxd\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}u(x)dxd\xi - \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}\chi(\xi)u(x)dxd\xi \\ &= u(0) - \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}\chi(\xi)u(x)dxd\xi\end{aligned}$$

La dernière égalité provient d'un résultat démontré dans le TD précédent.
La fonction $r : x \to (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi}\chi(\xi)d\xi$ est $\mathcal{C}^\infty$ (transformée de Fourier d'une fonction à support compact).
On a $P(D)T = \delta_0 + r$.

5. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soit ϕ une fonction à support dans $B(0,\epsilon)$, qui vaut 1 au voisinage de 0. Posons $T_\epsilon : u \to T(\phi u)$. C'est une distribution à support dans $B(0,\epsilon)$.
De plus, pour tout j, $\partial_j T_\epsilon(u) = \partial_j T(\phi u) + T((\partial_j\phi)u)$. La distribution $u \to T((\partial_j\phi)u)$ s'identifie à une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ car $\partial_j\phi$ est nulle au voisinage de 0.
On en déduit qu'il existe une fonction $\tilde{r} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour toute u, $P(D)T_\epsilon(u) = (P(D)T)(\phi u) + \int \tilde{r}u = u(0) + \int(\tilde{r} + \phi r)u$.
Donc $P(D)T_\epsilon = \delta_0 + (\tilde{r} + \phi r)$.