École Normale Supérieure
5 novembre 2015

Analyse des équations aux dérivées partielles

TD n$^{\text{o}}$7

Exercice 1 : racine carrée

Soit $a \in S^m$. On suppose qu'il existe $c, R > 0$ tels que, pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{Re} a(x,\xi) \geq c(1 + ||\xi||^2)^{m/2} \qquad \text{si } ||\xi|| \geq R$$

Montrer qu'il existe $b \in S^{m/2}$ tel que $\operatorname{Op}(a) - \operatorname{Op}(b) \circ \operatorname{Op}(b) \in \operatorname{Op}(S^{-\infty})$.

Exercice 2 : inégalité de Gårding

Soit $m \geq 0$.

1. Soit $a \in S^m$. On suppose qu'il existe $c, R > 0$ tel que, pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|a(x,\xi)| \geq c(1 + ||\xi||)^m \qquad \text{si } ||\xi|| \geq R$$

Soient $s, t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $K_0, K_1 > 0$ telles que, pour toute $u \in H^s$:

$$||u||_{H^s} \leq K_0 ||\operatorname{Op}(a)u||_{H^{s-m}} + K_1 ||u||_{H^t}$$

[Indication : introduire $b \in S^{-m}$ tel que $\operatorname{Op}(b) \circ \operatorname{Op}(a) - \mathrm{Id} \in \operatorname{Op}(S^{-\infty})$.]

2. Soit $a \in S^m$. On suppose qu'il existe $c, r > 0$ tels que, pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{Re} a(x,\xi) \geq c(1 + ||\xi||)^m \qquad \text{si } ||\xi|| \geq r$$

a) Montrer qu'il existe $R \in \operatorname{Op}(S^{m-1})$ tel que, pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\operatorname{Re} \langle \operatorname{Op}(a)u, u \rangle = \langle \operatorname{Op}(\operatorname{Re} a)u, u \rangle + \langle Ru, u \rangle$$

b) Montrer que, pour tout $T \in \operatorname{Op}(S^{m-1})$, il existe $C > 0$ tel que, pour toute $u \in H^{(m-1)/2}(\mathbb{R}^n)$:

$$|\langle Tu, u \rangle| \leq C ||u||^2_{H^{(m-1)/2}}$$

c) Montrer qu'il existe $C_0, C_1 > 0$ tels que, pour toute $u \in H^{m/2}(\mathbb{R}^n)$:

$$\operatorname{Re} \langle \operatorname{Op}(a)u, u \rangle \geq C_0 ||u||^2_{H^{m/2}} - C_1 ||u||^2_{H^{(m-1)/2}}$$

[Indication : montrer qu'il existe $b \in S^{m/2}$ tel que $\operatorname{Op}(\operatorname{Re} a) = \operatorname{Op}(b)^* \circ \operatorname{Op}(b) + S$ avec $S \in \operatorname{Op}(S^{m-1})$.]

3. [Raffinement] Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe $A_s, B_s > 0$ des constantes telles que :

$$\forall u \in H^{m/2}(\mathbb{R}^n) \qquad \mathrm{Re}\,\langle \mathrm{Op}(a)u, u\rangle \geq A_s||u||^2_{H^{m/2}} - B_s||u||^2_{H^s}$$

[Indication : majorer $||u||_{H^{(m-1)/2}}$ en fonction de $||u||_{H^{m/2}}$ et $||u||_{H^s}$.]

Exercice 3 : application de l'inégalité de Gårding

Soit Ω un ouvert borné de bord régulier.
Soient $L_1, ..., L_s, L'_1, ..., L'_s$ des opérateurs différentiels réels d'ordre au plus $k \in \mathbb{N}$ (avec des coefficients $\mathcal{C}^\infty$, bornés et ayant toutes leurs dérivées bornées). Alors $L = L_1 \circ L'_1 + ... + L_s \circ L'_s$ est un opérateur différentiel d'ordre au plus $2k$. On suppose que le symbole l associé vérifie, pour des constantes $c, R > 0$:

$$|l(x,\xi)| \geq c(1 + ||\xi||)^{2k} \qquad \text{si } ||\xi|| \geq R$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $L_\lambda = L + \lambda \mathrm{Id}$.
On considère, pour une fonction $f \in H^{-k}(\Omega) = (H^k_0(\Omega))'$ fixée, le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} L_\lambda u &= f \text{ sur } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on dit que $u \in H^k_0(\Omega)$ est une solution faible du problème de Dirichlet si, pour toute $v \in H^k_0(\Omega)$:

$$\langle L'_1 u, L^*_1 v\rangle + ... + \langle L'_s u, L^*_s v\rangle + \lambda \langle u, v\rangle = \langle f, v\rangle$$

1. Démontrer que, pour toute f, si λ est assez grand, alors le problème de Dirichlet admet une solution faible.
[Indication : utiliser le théorème de Lax-Milgram, rappelé ci-dessous (pour la démonstration, voir le TD 1).]

Théorème 3.1 (Lax-Milgram)**.** *Soit H un espace de Hilbert. Soit $B : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire et continue. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $x \in H$:*

$$B(x,x) \geq c||x||^2_H$$

Pour toute $T \in H'$, il existe $u \in H$ tel que, pour tout $v \in H$:

$$T(v) = B(u,v)$$

2. Quel cas particulier de ce théorème avez-vous vu en cours ?

Exercice 4 : les opérateurs pseudo-différentiels sont bornés sur L^2

1. Soit H un espace de Hilbert. Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite d'opérateurs continus de H vers H. On suppose qu'il existe une fonction paire $\omega : \mathbb{Z} \to]0; +\infty[$ vérifiant les trois propriétés suivantes :
   1. $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \omega(j) < +\infty$

2. $\forall j, k, \quad \sqrt{||T_j^* T_k||} \leq \omega(j-k)$

3. $\forall j, k, \quad \sqrt{||T_j T_k^*||} \leq \omega(j-k)$

On note $\sigma = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega(j)$.
a) Montrer que, pour tout j, $||T_j|| \leq \omega(0)$.
b) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $(i_1, ..., i_{2N}) \in \mathbb{Z}^{2N}$:

$$||T_{i_1}^* T_{i_2} T_{i_3}^* T_{i_4} ... T_{i_{2N-1}}^* T_{i_{2N}}|| \leq \omega(0)\omega(i_1 - i_2)\omega(i_2 - i_3)...\omega(i_{2N-2} - i_{2N-1})\omega(i_{2N-1} - i_{2N})$$

c) Montrer que, pour tout sous-ensemble fini F de $\mathbb{Z}$, si on note $U = \sum_{j \in F} T_j$, alors :

$$||U|| \leq \sigma$$

[Indication : à l'aide de la question précédente, majorer $||(U^*U)^N||$ pour tout N.]
2. Dans cette question, on montre que, pour tout $a \in S^0_{0,0}$, $\mathrm{Op}(a) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se prolonge en un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ vers $L^2(\mathbb{R}^n)$, dont la norme est majorée par une combinaison linéaire des normes de certaines dérivées partielles de a.
Remarquons qu'on a déjà vu ce résultat pour $a \in S^0_{1,0} = S^0$ mais que le théorème pour $a \in S^0_{0,0}$ est plus fort.
On admet le théorème suivant, variante du théorème démontré à la question 1.c).

Théorème 4.1. *Soit $(A_z)_{z \in \mathbb{R}^2}$ une famille bornée d'opérateurs de $L^2(\mathbb{R}^2)$ dans lui-même, mesurable en z. On suppose qu'il existe $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. $\forall z, z' \quad ||A_z A_{z'}^*|| \leq h(z, z')^2$

2. $\forall z, z' \quad ||A_z^* A_{z'}|| \leq h(z, z')^2$

3. l'opérateur H ayant h pour noyau est borné de $L^2(\mathbb{R}^2)$ vers $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Alors, pour toute fonction $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mesurable et bornée, $A = \int_{\mathbb{R}^2} \gamma(z) A_z dz$ est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, dont la norme vérifie :

$$||A||_{L^2 \to L^2} \leq ||\gamma||_\infty ||H||_{L^2 \to L^2}$$

a) Montrer qu'il suffit de démontrer le résultat de continuité voulu en dimension $n = 1$. On fera dans la suite l'hypothèse que n vaut 1.
[Indication : on pourra utiliser le fait que, si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, alors $(u_{k_1}(x_1)...u_{k_n}(x_n))_{k_1,...,k_n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n)$.]
b) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(x) = x^2 e^{-x}/2$ si $x \geq 0$ et $\phi(x) = 0$ sinon. Montrer qu'au sens des distributions :

$$(1 + \partial_x)^3 \phi = \delta_0$$

c) On pose $g(x, \xi) = (1 + \partial_x)^3 (1 + \partial_\xi)^3 a(x, \xi)$. Montrer que :

$$\forall x, \xi \qquad a(x, \xi) = \int g(s, t) \phi(x - s) \phi(\xi - t) ds dt$$

d) Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A_{st} : f \in L^2(\mathbb{R}) \to \left(x \to \int e^{ix\xi} \phi(x - s) \phi(\xi - t) \hat{f}(\xi) d\xi \right)$$

Soient s, t, s', t' quelconques. Montrer que $A_{st}A^*_{s't'}$ est un opérateur à noyau. Calculer le noyau, qu'on notera K.
e) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|K(x,y)| \leq Ce^{-|t-t'|/2}(1+|x-y|)^{-3}\phi(x-s)\phi(y-s')$$

f) Montrer que, pour une certaine constante $c > 0$:

$$\forall s, t, s', t' \qquad ||A_{st}A^*_{s't'}||_{L^2 \to L^2} \leq c(1+|s-s'|)^{-3}e^{-|t-t'|/2}$$

[Indication : on pourra utiliser l'inégalité $||A_{st}A^*_{s't'}||^2 \leq \int |K(x,y)|^2 dxdy$.]
On admet que $||A^*_{st}A_{s't'}||$ vérifie la même inégalité.
g) Démontrer le théorème.