Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$7

Corrigé

Exercice 1

Lemme 1.1. *Il existe* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de symboles telle que, pour tout* $k\in\mathbb{N}$, $b_k\in S^{m/2-k}$ *et, pour tout* $K\in\mathbb{N}$ *:*

$$\mathrm{Op}(a)-\mathrm{Op}(b_0+...+b_K)\circ\mathrm{Op}(b_0+...+b_K)\in\mathrm{Op}(S^{m-K-1})$$

Démonstration. On construit la suite par récurrence.
On commence par b_0.
Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui coïncide avec une détermination de la racine carrée sur $\{z\in\mathbb{C}\text{ tq }\mathrm{Re}(z)\geq c\}$. On pose :

$$b_0(x,\xi)=(1+||\xi||^2)^{m/4}F\left(a(x,\xi)(1+||\xi||^2)^{-m/2}\right)$$

Il s'agit d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout (x,ξ) tel que $||\xi||\geq R$:

$$b_0(x,\xi)^2=a(x,\xi)$$

On vérifie en calculant les dérivées que b_0 appartient à $S^{m/2}$.
D'après le théorème de calcul symbolique sur la composition, $\mathrm{Op}(b_0)\circ\mathrm{Op}(b_0)=\mathrm{Op}(b_0^2)+R$ avec $R\in\mathrm{Op}(S^{m-1})$. Comme b_0^2-a est à support compact en ξ, $\mathrm{Op}(a)-\mathrm{Op}(b_0^2)\in\mathrm{Op}(S^{-\infty})$ donc $\mathrm{Op}(a)-\mathrm{Op}(b_0)\circ\mathrm{Op}(b_0)\in S^{m-1}$.
On suppose maintenant que la suite a été construite jusqu'à b_k et on construit $b_{k+1}\in S^{m/2-(k+1)}$ tel que $\mathrm{Op}(a)-\mathrm{Op}(b_0+...+b_{k+1})\circ\mathrm{Op}(b_0+...+b_{k+1})\in\mathrm{Op}(S^{m-k-2})$.
On pose $b'=b_0+...+b_k$. Par hypothèse de récurrence, on a $\mathrm{Op}(a)-\mathrm{Op}(b')\circ\mathrm{Op}(b')=\mathrm{Op}(c)$, avec $c\in S^{m-k-1}$.
Il existe $c',R'>0$ tels que, pour tous (x,ξ) :

$$|b'(x,\xi)|\geq c'(1+||\xi||^2)^{m/4}\qquad\text{si }||\xi||\geq R'\tag{1}$$

En effet, $\mathrm{Op}(a-b'^2)\in\mathrm{Op}(S^{m-1})$ donc $|b(x,\xi)|^2\geq|a(x,\xi)|-C(1+||\xi||)^{m-1}$ pour une certaine constante C. L'équation (1) se déduit donc de la condition d'ellipticité imposée sur a.
On choisit $G:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $G(z)=1/z$ si $|z|\geq c'$. On pose :

$$b_{k+1}(x,\xi)=\frac{c(x,\xi)}{2}G(b'(x,\xi)(1+||\xi||^2)^{-m/4})(1+||\xi||^2)^{-m/4}$$

C'est un symbole de $S^{m/2-k-1}$.

D'après le théorème de calcul symbolique sur la composition :

$$\begin{aligned}\operatorname{Op}(a)-\operatorname{Op}(b'+b_{k+1})\circ\operatorname{Op}(b'+b_{k+1}) &= \operatorname{Op}(a)-\operatorname{Op}(b')\circ\operatorname{Op}(b')-\operatorname{Op}(2b'b_{k+1})+S\\ &= \operatorname{Op}(c-2b'b_{k+1})+S\end{aligned}$$

avec $S\in\operatorname{Op}(S^{m-k-2})$.
Le symbole $c-2b'b_{k+1}$ est à support compact en ξ. Il appartient donc à $\operatorname{Op}(S^{-\infty})$. On a ainsi :

$$\operatorname{Op}(a)-\operatorname{Op}(b'+b_{k+1})\circ\operatorname{Op}(b'+b_{k+1})\in\operatorname{Op}(S^{m-k-2})$$

ce qui est ce qu'on voulait. $\square$

Il suffit maintenant de choisir b tel que $b\sim\sum_{j\in\mathbb{N}}b_j$ (on a vu dans un TD précédent qu'un tel b existait toujours).
En effet, pour tout K, $b-(b_0+...+b_K)\in\operatorname{Op}(S^{m/2-(K+1)})$ donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{Op}(b)\circ\operatorname{Op}(b) &= \operatorname{Op}(b_0+...+b_K)\circ\operatorname{Op}(b_0+...+b_K)+S_1\\ &= \operatorname{Op}(a)+S_2+S_1\end{aligned}$$

avec $S_1,S_2\in\operatorname{Op}(S^{m-(K+1)})$.
Puisque c'est vrai pour tout K, $\operatorname{Op}(b)\circ\operatorname{Op}(b)-\operatorname{Op}(a)\in\operatorname{Op}(S^{-\infty})$.

Exercice 2

1. Soit $b\in S^{-m}$ tel que $\operatorname{Op}(b)\circ\operatorname{Op}(a)=\mathrm{Id}+R$ avec $R\in\operatorname{Op}(S^{-\infty})$ (on a vu qu'un tel b existait dans les TD précédents).
Alors, pour toute u :

$$\begin{aligned}||u||_{H^s} &\le ||(\mathrm{Id}+R)u||_{H^s}+||Ru||_{H^s}\\ &= ||\operatorname{Op}(b)\circ\operatorname{Op}(a)u||_{H^s}+||Ru||_{H^s}\\ &\le ||\operatorname{Op}(b)||_{H^{s-m}\to H^s}||\operatorname{Op}(a)u||_{H^{s-m}}+||R||_{H^t\to H^s}||u||_{H^t}\end{aligned}$$

On pose $K_0=||\operatorname{Op}(b)||_{H^{s-m}\to H^s}$ et $K_1=||R||_{H^t\to H^s}$ (ce qui est fini puisque $R\in\operatorname{Op}(S^{-\infty})$).
2. a)

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle\operatorname{Op}(a)u,u\rangle &= \frac{1}{2}\left(\langle\operatorname{Op}(a)u,u\rangle+\langle u,\operatorname{Op}(a)u\rangle\right)\\ &= \left\langle\frac{1}{2}\left(\operatorname{Op}(a)+\operatorname{Op}(a)^*\right)u,u\right\rangle\end{aligned}$$

D'après les théorèmes de calcul symbolique, on sait qu'on a $\operatorname{Op}(a)^*-\operatorname{Op}(\overline{a})\in\operatorname{Op}(S^{m-1})$. Donc il existe $R\in\operatorname{Op}(S^{m-1})$ tel que :

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{Op}(a)+\operatorname{Op}(a)^*\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{Op}(a)+\operatorname{Op}(\overline{a})\right)+R=\operatorname{Op}(\operatorname{Re}(a))+R$$

ce qui donne alors $\operatorname{Re}\langle \operatorname{Op}(a)u, u\rangle = \langle \operatorname{Op}(\operatorname{Re}(a))u, u\rangle + \langle Ru, u\rangle$.
b) T est un opérateur continu de $H^{(m-1)/2}$ vers $H^{-(m-1)/2}$. On a donc, pour toute $u \in H^{(m-1)/2}$:

$$|\langle Tu, u\rangle| \leq ||Tu||_{H^{-(m-1)/2}}||u||_{H^{(m-1)/2}} \leq ||T||_{H^{(m-1)/2}\to H^{-(m-1)/2}}||u||^2_{H^{(m-1)/2}}$$

c) Soit $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction positive à support compact qui vaut 1 sur $B(0, r)$. On pose $\tilde{a} = \operatorname{Re} a(x, \xi) + \lambda\chi(\xi)(1 + ||\xi||^2)^{m/2}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^+$, choisi suffisamment grand pour que :

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad \tilde{a}(x, \xi) \geq c(1 + ||\xi||)^m \tag{2}$$

Alors $b = \sqrt{\tilde{a}}$ est un symbole de $S^{m/2}$.
D'après les théorèmes de calcul symbolique, on sait qu'on a $\operatorname{Op}(b)^* \circ \operatorname{Op}(b) = \operatorname{Op}(|b|^2) + S$ avec $S \in \operatorname{Op}(S^{m-1})$. Comme $|b|^2 - \operatorname{Re} a$ est un symbole à support compact en ξ, $|b|^2 - \operatorname{Re} a \in S^{-\infty}$, ce qui entraîne :

$$\operatorname{Op}(b)^* \circ \operatorname{Op}(b) = \operatorname{Op}(\operatorname{Re} a) + S' \qquad \text{avec } S' \in \operatorname{Op}(S^{m-1})$$

De plus, d'après l'équation (2), le symbole b vérifie la condition de la question 1. (pour m remplacé par $m/2$). Il existe donc des constantes $K, K' > 0$ telles que :

$$\forall u \in H^{m/2} \qquad ||\operatorname{Op}(b)u||_{L^2} \geq K||u||_{H^{m/2}} - K'||u||_{H^{(m-1)/2}}$$

ce qui implique, pour des constantes K_1 et K_1' bien choisies :

$$\forall u \in H^{m/2} \qquad ||\operatorname{Op}(b)u||^2_{L^2} \geq K_1||u||^2_{H^{m/2}} - K_1'||u||^2_{H^{(m-1)/2}}$$

Alors, pour toute $u \in H^{m/2}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle \operatorname{Op}(a)u, u\rangle &= \langle \operatorname{Op}(\operatorname{Re} a)u, u\rangle + \langle Ru, u\rangle \\
&= \langle \operatorname{Op}(b)^* \circ \operatorname{Op}(b)u, u\rangle + \langle (R - S')u, u\rangle \\
&= ||\operatorname{Op}(b)u||_2^2 + \langle (R - S')u, u\rangle \\
&\geq ||\operatorname{Op}(b)u||_2^2 - C||u||^2_{H^{(m-1)/2}} \\
&\geq K_1||u||^2_{H^{m/2}} - (C + K_1')||u||^2_{H^{(m-1)/2}}
\end{aligned}$$

3. Si $s \geq (m-1)/2$ c'est une conséquence directe de la question 2.c) puisque $||u||_{H^s} \geq ||u||_{H^{(m-1)/2}}$ pour toute u.
Supposons maintenant $s < (m-1)/2$. On pose $t = \frac{m}{4}\left(1 - \frac{1}{m-2s}\right)$, $r = \frac{m-2s-1}{m-2s}$, $p = 2\frac{m-2s}{m-2s-1}$ et $q = 2(m-2s)$.
On a $1/p + 1/q = 1/2$ donc, pour toute $u \in H^{m/2}$, par Hölder :

$$\begin{aligned}
||u||_{H^{(m-1)/2}} &= ||(1 + ||\xi||^2)^{(m-1)/4}\hat{u}(\xi)||_2 \\
&= ||(1 + ||\xi||^2)^t|\hat{u}(\xi)|^r(1 + ||\xi||^2)^{(m-1)/4-t}|\hat{u}(\xi)|^{1-r}||_2 \\
&\leq ||(1 + ||\xi||^2)^t|\hat{u}(\xi)|^r||_p||(1 + ||\xi||^2)^{(m-1)/4-t}|\hat{u}(\xi)|^{1-r}||_q \\
&= ||(1 + ||\xi||^2)^{m/2}|\hat{u}(\xi)|^2||_1^{1/p}||(1 + ||\xi||^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2||_1^{1/q}
\end{aligned}$$

$$= ||u||_{H^{m/2}}^{2/p} ||u||_{H^s}^{2/q}$$

ce qui entraîne, pour tout $\epsilon > 0$:

$$||u||_{H^{(m-1)/2}}^2 \leq ||u||_{H^{m/2}}^{4/p} ||u||_{H^s}^{4/q} \leq \frac{2\epsilon^p}{p} ||u||_{H^{m/2}}^2 + \epsilon^{-q} \frac{2}{q} ||u||_{H^s}^2$$

L'inégalité de la question 2.c) donne alors :

$$\forall u \in H^{m/2} \qquad \mathrm{Re}\, \langle \mathrm{Op}(a)u, u \rangle \geq \left(C_0 - \frac{2}{p} C_1 \epsilon^p \right) ||u||_{H^{m/2}}^2 - C_1 \epsilon^{-q} \frac{2}{q} ||u||_{H^s}^2$$

ce qui est bien de la forme voulue si ϵ est assez petit.

Exercice 3

1. On suppose pour l'instant λ fixé.
On pose, pour toutes $u, v \in H_0^k(\Omega)$:

$$B(u,v) = \langle L_1' u, L_1^* v \rangle + \ldots + \langle L_s' u, L_s^* v \rangle + \lambda \langle u, v \rangle$$

C'est une forme bilinéaire. Elle est continue sur $H_0^k(\Omega)$ car, pour tout $t \leq s$, L_t' et L_t^* sont continues de $H_0^k(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$.
De plus, pour toute $u \in H_0^k(\Omega)$, si on note $\tilde{u}$ la fonction qui coïncide avec u sur Ω et qui vaut 0 en-dehors de Ω, on a $\tilde{u} \in H^k(\mathbb{R}^n)$ (on rappelle que ce ne serait pas vrai pour n'importe quelle $u \in H^k(\Omega)$ mais qu'ici, on suppose que u appartient à l'adhérence dans $H^k(\Omega)$ de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, ce qui rend cette affirmation vraie).
En utilisant la question 3. de l'exercice 2 :

$$\begin{aligned} B(u,u) &= B(\tilde{u}, \tilde{u}) \\ = \langle L_1' \tilde{u}, L_1^* \tilde{u} \rangle + \ldots + \langle L_s' \tilde{u}, L_s^* \tilde{u} \rangle + \lambda \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle & \\ &= \langle (L_1 \circ L_1' + \ldots + L_s \circ L_s') \tilde{u}, \tilde{u} \rangle + \lambda ||\tilde{u}||_2^2 \\ &= \langle L\tilde{u}, \tilde{u} \rangle + \lambda ||\tilde{u}||_2^2 \\ &\geq A_0 ||\tilde{u}||_{H^k}^2 - B_0 ||\tilde{u}||_2^2 + \lambda ||\tilde{u}||_2^2 \\ &\geq A_0 ||u||_{H^k}^2 - B_0 ||u||_2^2 + \lambda ||u||_2^2 \end{aligned}$$

Si λ est plus grand que B_0, les hypothèses du théorème du théorème de Lax-Milgram sont donc vérifiées (pour $H = H_0^k(\Omega)$). Le théorème garantit alors l'existence de $u \in H_0^k(\Omega)$ telle que $B(u, .) = f$, ce qui est équivalent à l'existence d'une solution faible du problème de Dirichlet.

2. Le cours présente le cas où $L_\lambda = -\Delta + \lambda \mathrm{Id}$, c'est-à-dire par exemple $L_j = -\partial_j$ et $L_j' = \partial_j$. Toutefois, dans le cours, le résultat d'existence est démontré même pour $\lambda = 0$, en utilisant l'inégalité de Poincaré à la place de l'inégalité de Gårding.

Exercice 4

1. a) $||T_j|| = \sqrt{||T_j^* T_j||} \leq \omega(0)$

b)

$$\begin{aligned}
||T_{i_1}^*...T_{i_{2N}}|| &= \sqrt{||T_{i_1}^*...T_{i_{2N}}(T_{i_1}^*...T_{i_{2N}})^*||} \\
&= \sqrt{||T_{i_1}^* T_{i_2}...T_{i_{2N}} T_{i_{2N}}^*...T_{i_1}||} \\
&\leq \sqrt{||T_{i_1}^* T_{i_2}||\, ||T_{i_3}^* T_{i_4}||...||T_{i_{2N-1}}^* T_{i_{2N}}||||T_{i_{2N}}^*||\, ||T_{i_{2N-1}} T_{i_{2N-2}}^*||...||T_{i_3} T_{i_2}^*||\, ||T_{i_1}||} \\
&\leq \omega(i_1 - i_2)\omega(i_2 - i_3)...\omega(i_{2N-1} - i_{2N})\sqrt{||T_{i_{2N}}^*||\, ||T_{i_1}||} \\
&\leq \omega(0)\omega(i_1 - i_2)\omega(i_2 - i_3)...\omega(i_{2N-1} - i_{2N})
\end{aligned}$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
||(U^*U)^N|| &= \left|\left| \sum_{i_1,...,i_{2N} \in F} T_{i_1}^*...T_{i_{2N}} \right|\right| \\
&\leq \sum_{i_1,...,i_{2N} \in F} \omega(0)\omega(i_1 - i_2)...\omega(i_{2N-1} - i_{2N}) \\
&\leq \omega(0) \sum_{i_1 \in F, k_2,...,k_{2N} \in \mathbb{Z}} \omega(k_2)\omega(k_3)...\omega(k_{2N}) \\
&= \omega(0) \sum_{i_1 \in F} \sigma^{2N-1} \\
&\leq \mathrm{Card}(F)\sigma^{2N}
\end{aligned}$$

Au moins lorsque N est une puissance de 2, on a, en utilisant l'égalité $||A^*A|| = ||A||^2$:

$$\begin{aligned}
||U||^{2N} = ||(U^*U)^N|| \leq \mathrm{Card}(F)\sigma^{2N} \\
\Rightarrow \quad ||U|| \leq (\mathrm{Card}(F))^{1/(2N)}\sigma
\end{aligned}$$

En passant à la limite $N \to +\infty$, on obtient le résultat demandé.

2. a) On suppose que c'est vrai en dimension $n = 1$ et on montre que c'est vrai pour tout n. On procède par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, c'est vrai par hypothèse. Supposons maintenant que c'est vrai pour $n \geq 1$ et montrons-le pour $n + 1$.

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ constituée de fonctions de la classe de Schwartz (on admet qu'une telle base existe). Puisque $(u_{k_1}(x_1)...u_{k_{n+1}}(x_{n+1}))_{k_1,...,k_{n+1} \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$, il suffit de montrer que, pour tous $k_1, ..., k_{n+1}, k'_1, ..., k'_{n+1}$:

$$|\left\langle \mathrm{Op}(a)(u_{k_1}....u_{k_{n+1}}), u_{k'_1}...u_{k'_{n+1}} \right\rangle| \leq M$$

pour une constante M majorée par une combinaison linéaire des normes de certaines dérivées partielles de a.

$$\left\langle \mathrm{Op}(a)(u_{k_1}....u_{k_{n+1}}), u_{k'_1}...u_{k'_{n+1}} \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int a(x_1, ..., x_{n+1}, \xi_1, ..., \xi_{n+1}) e^{ix.\xi} \hat{u}_{k_1}(\xi_1) ... \hat{u}_{k_{n+1}}(\xi_{n+1}) \\
&\qquad\qquad \times \overline{u_{k'_1}(x_1)} ... \overline{u_{k'_{n+1}}(x_{n+1})} dx_1 ... dx_{n+1} d\xi_1 ... d\xi_{n+1} \\
&= \left\langle \mathrm{Op}(b)(u_{k_{n+1}}), u_{k'_{n+1}} \right\rangle
\end{aligned}
$$

si on note :

$$\forall x, \xi \in \mathbb{R}^2 \quad b(x,\xi) = \left\langle \mathrm{Op}(a(..., x, ..., \xi))(u_{k_1} ... u_{k_n}), u_{k'_1} ... u_{k'_{n+1}} \right\rangle$$

Puisque $\mathrm{Op}(a(..., x, ..., \xi))$ est un opérateur pseudo-différentiel en dimension n, il est continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ vers $L^2(\mathbb{R}^n)$, par hypothèse de récurrence. De plus, sa norme est contrôlée par la norme de certaines dérivées de a. Donc b est une fonction bornée, dont le suprémum est majoré par une combinaison linéaire des normes de certaines dérivées de a.
En dérivant sous le signe somme, on voit que $b \in S^0_{0,0}$ et que, pour la même raison que précédemment, toutes ses dérivées sont majorées par des combinaisons linéaires des normes de certaines dérivées de a. On peut donc appliquer à b le résultat pour $n = 1$:

$$\forall k_1, ... \qquad | \left\langle \mathrm{Op}(a)(u_{k_1} .... u_{k_{n+1}}), u_{k'_1} ... u_{k'_{n+1}} \right\rangle | \le || \mathrm{Op}(b) ||_{L^2 \to L^2}$$

ce qui conclut.
b) $(1 + \partial_x)\phi(x) = xe^{-x} 1_{x \ge 0}$
$(1 + \partial_x)^2 \phi(x) = e^{-x} 1_{x \ge 0}$
La dérivée de $e^{-x} 1_{x \ge 0}$ vaut (cela se vérifie par intégration par parties, en utilisant la définition de la dérivée au sens des distributions) $\delta_0 - e^{-x} 1_{x \ge 0}$, ce qui entraîne le résultat.
c) $a = a \star \delta_{(0,0)} = a \star ((1 + \partial_x)^3 (1 + \partial_\xi)^3 [\phi(x)\phi(\xi)]) = ((1 + \partial_x)^3 (1 + \partial_\xi)^3 a) \star (\phi(x)\phi(\xi))$
d) L'application A_{st} envoie une fonction de L^2 vers une autre fonction de L^2. En effet, pour toute $f \in L^2$:

$$A_{st}(f)(x) = 2\pi \phi(x - s) \mathcal{F}^{-1}(\phi(. - t)\hat{f})(x)$$

La multiplication par $\phi(.-s)$ est continue de L^2 vers L^2 (car ϕ est bornée), $\mathcal{F}^{-1}$, la multiplication par $\phi(. - t)$ et $\mathcal{F}$ aussi. Donc A_{st} est une composition d'opérateurs continus de L^2 vers L^2.
Les multiplications par $\phi(. - s')$ ou $\phi(. - t')$ sont leurs propres adjointes. L'adjoint de $\mathcal{F}$ est $2\pi\mathcal{F}^{-1}$ et celui de $\mathcal{F}^{-1}$ est $(2\pi)^{-1}\mathcal{F}$. Donc :

$$A^*_{s't'}(f) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}(\phi(. - t')\mathcal{F}(\phi(. - s')f))$$

En composant avec A_{st} :

$$
\begin{aligned}
A_{st} A^*_{s't'}(f)(x) &= 2\pi \int e^{ix\xi} \phi(x - s)\phi(\xi - t) \left[\phi(\xi - t')\mathcal{F}(\phi(. - s')f)(\xi)\right] d\xi \\
&= 2\pi \int e^{i(x-y)\xi} \phi(x - s)\phi(\xi - t)\phi(\xi - t')\phi(y - s') f(y) dy d\xi \\
&= \int K(x, y) f(y) dy
\end{aligned}
$$

si on pose $K(x,y) = 2\pi\phi(x-s)\phi(y-s')\int e^{i(x-y)\xi}\phi(\xi-t)\phi(\xi-t')d\xi$.
e)

$$\begin{aligned}K(x,y) &= 2\pi\phi(x-s)\phi(y-s')\int e^{i(x-y)\xi}\phi(\xi-t)\phi(\xi-t')d\xi \\ &= 2\pi\phi(x-s)\phi(y-s')e^{i(x-y)(t+t')/2}\int e^{i(x-y)\xi}\phi(\xi-(t-t')/2)\phi(\xi+(t-t')/2)d\xi \\ &= \frac{\pi}{2}\phi(x-s)\phi(y-s')e^{i(x-y)(t+t')/2}\int_{|t-t'|/2}^{+\infty} e^{i(x-y)\xi}\left(\xi^2-\left(\frac{t-t'}{2}\right)^2\right)^2 e^{-2\xi}d\xi\end{aligned}$$

Or on vérifie que :

$$(2+\partial_\xi)^3\left[\left(\xi^2-\left(\frac{t-t'}{2}\right)^2\right)^2 e^{-2\xi}1_{\xi\geq|t-t'|/2}\right] = 24\xi e^{-2\xi}1_{\xi\geq|t-t'|/2} + 2(t-t')^2e^{-|t-t'|}\delta_{|t-t'|/2}(\xi)$$

La fonction $\xi\to\xi e^{-2\xi}1_{\xi\geq|t-t'|/2}$ est dans L^1, avec une norme majorée par $A|t-t'|e^{-|t-t'|}$ pour une certaine constante A. Sa transformée de Fourier est donc dans L^∞, avec une norme L^∞ majorée par $A|t-t'|e^{-|t-t'|}$.
La transformée de Fourier en $x-y$ de $\xi\to 2(t-t')^2e^{-|t-t'|}\delta_{|t-t'|/2}(\xi)$ est :

$$2(t-t')^2e^{-|t-t'|}e^{-i(x-y)|t-t'|/2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}&|2-i(x-y)|^3\left|\int_{|t-t'|/2}^{+\infty} e^{i(x-y)\xi}\left(\xi^2-\left(\frac{t-t'}{2}\right)^2\right)^2 e^{-2\xi}d\xi\right| \\ &= \left|\int_{|t-t'|/2}^{+\infty} e^{i(x-y)\xi}(2+\partial_\xi)^3\left[\left(\xi^2-\left(\frac{t-t'}{2}\right)^2\right)^2 e^{-2\xi}\right]d\xi\right| \\ &\leq A|t-t'|e^{-|t-t'|} + 2(t-t')^2e^{-|t-t'|} \\ &\leq Me^{-|t-t'|/2}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}|K(x,y)| &\leq \frac{\pi}{2}\phi(x-s)\phi(y-s')\left|\int_{|t-t'|/2}^{+\infty} e^{i(x-y)\xi}\left(\xi^2-\left(\frac{t-t'}{2}\right)^2\right)^2 e^{-2\xi}d\xi\right| \\ &\leq M'\phi(x-s)\phi(y-s)\frac{1}{|2-i(x-y)|^3}e^{-|t-t'|/2} \\ &\leq M''\phi(x-s)\phi(y-s)(1+|x-y|)^{-3}e^{-|t-t'|/2}\end{aligned}$$

f)

$$
\begin{aligned}
\int |K(x,y)|^2 dxdy &\leq C^2 e^{-|t-t'|} \int (1+|x-y|)^{-6} |\phi(x-s)|^2 |\phi(y-s')|^2 dxdy \\
&= \frac{C^2 e^{-|t-t'|}}{4} \int_{(\mathbb{R}^+)^2} (1+|(x-y)+(s-s')|)^{-6} x^2 y^2 e^{-(x+y)} dxdy \\
&\leq M e^{-|t-t'|} \int_{(\mathbb{R}^+)^2} (1+|(x-y)+(s-s')|)^{-6} e^{-(x+y)/2} dxdy \\
&= M e^{-|t-t'|} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|z|}^{+\infty} e^{-z'/2} dz' \right) (1+|z+(s-s')|)^{-6} dz \\
&= M' e^{-|t-t'|} \int_{\mathbb{R}} (1+|z+(s-s')|)^{-6} e^{-|z|/2} dz \\
&= M' e^{-|t-t'|} \left(\int_{|z|\leq|s-s'|/2} (1+|z+(s-s')|)^{-6} e^{-|z|/2} dz \right. \\
&\qquad \left. + \int_{|z|\geq|s-s'|/2} (1+|z+(s-s')|)^{-6} e^{-|z|/2} dz \right) \\
&\leq M'' e^{-|t-t'|} \left((1+|s-s'|)^{-6} \int_{|z|\leq|s-s'|/2} e^{-|z|/2} dz \right. \\
&\qquad \left. + \int_{|z|\geq|s-s'|/2} e^{-|z|/2} dz \right) \\
&\leq M''' e^{-|t-t'|} ((1+|s-s'|)^{-6} + e^{-|s-s'|/4}) \\
&\leq M'''' e^{-|t-t'|} (1+|s-s'|)^{-6}
\end{aligned}
$$

On applique une racine carrée et l'indication donne le résultat.
g) Pour toute f :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Op}(a)(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int a(x,\xi) e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int g(s,t) \phi(x-s) \phi(\xi-t) e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi ds dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int g(s,t) A_{st}(f)(x) ds dt
\end{aligned}
$$

Donc $\mathrm{Op}(a) = \frac{1}{2\pi} g(s,t) A_{st} ds dt$.
La fonction g est bornée, puisque a appartient à $S^0_{0,0}$, et sa norme infinie est majorée par une combinaison linéaire des normes de certaines dérivées de a. Le théorème admis donne donc le résultat si on peut l'appliquer.
Posons $h((s,t),(s',t')) = c^{1/2}(1+|s-s'|)^{-3/2} e^{-|t-t'|/4}$. Il suffit de montrer que l'opérateur ayant h pour noyau est borné de $L^2(\mathbb{R}^2)$ vers $L^2(\mathbb{R}^2)$. C'est une conséquence du lemme de Schur (vu dans un TD précédent), puisque :

$$
\forall (s,t) \qquad \int |h((s,t),(s',t'))| ds' dt' = c^{1/2} \int (1+|S|)^{-3/2} e^{-|T|/4} dS dT < +\infty
$$

$$\forall (s',t') \qquad \int |h((s,t),(s',t'))| ds dt = c^{1/2} \int (1+|S|)^{-3/2} e^{-|T|/4} dS dT < +\infty$$