École Normale Supérieure
19 novembre 2015

Analyse des équations aux dérivées partielles

TD n$^{\mathrm{o}}$8 : équations hyperboliques

Exercice 1 : résolution par régularisation

Soit a_t un symbole hyperbolique dépendant du temps. Soient $T > 0, s \in \mathbb{R}, u_0 \in H^s$ et $f \in \mathcal{C}^0([0;T], H^s)$. Soit $\epsilon \in]0;1[$. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\partial_t u + \mathrm{Op}(a_t) J_\epsilon u = f, \qquad u(0) = u_0 \tag{1}$$

où J_ϵ, appelé multiplicateur de Friedrichs, est défini par :

$$\widehat{J_\epsilon v}(\xi) = \chi(\epsilon\xi)\hat{v}(\xi)$$

avec χ une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, à support dans $B(0,2)$ et valant 1 sur $B(0,1)$.

1. Montrer que $\mathrm{Op}(a_t)J_\epsilon = \mathrm{Op}(a_t^\epsilon)$, où :

$$a_t^\epsilon(x,\xi) = a_t(x,\xi)\chi(\epsilon\xi)$$

2. Montrer qu'il existe une unique solution $u_\epsilon \in \mathcal{C}^1([0;T], H^s)$ de (1).

3. Montrer que $t \in [0;T] \to (a_t^\epsilon)^* - \overline{a_t^\epsilon} + 2\,\mathrm{Re}(a_t^\epsilon)$ est bornée dans S^0 uniformément en ϵ.

4. Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $\epsilon > 0$, tout $t \in [0;T]$ et toute fonction $v \in \mathcal{C}^1([0;T], H^s(\mathbb{R}^n))$:

$$||v(t)||_{H^s} \leq C||v(0)||_{H^s} + C\int_0^t ||(\partial_t v + \mathrm{Op}(a^\epsilon)v)(\tau)||_{H^s} d\tau$$

En déduire que $(u_\epsilon)_{\epsilon\in]0;1[}$ est bornée dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s)$.

5. Montrer que $(u_\epsilon)_{\epsilon\in]0;1[}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^{s-2})$.

6. Soient $s_1 < s_2$ deux nombres réels et $\sigma \in]s_1; s_2[$. Écrivons σ sous la forme $\sigma = \alpha s_1 + (1-\alpha)s_2$ avec $\alpha \in [0;1]$. On rappelle qu'il existe une constante $C(s_1, s_2)$ telle que, pour toute $u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$:

$$||u||_{H^\sigma} \leq C(s_1,s_2)||u||_{H^{s_1}}^\alpha ||u||_{H^{s_2}}^{1-\alpha}$$

En déduire que (u_ϵ) est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^\sigma)$ pour $s-2 < \sigma < s$ et que u_ϵ converge dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^\sigma) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{\sigma-1})$ vers une limite qu'on note u.

7. Montrer que $u \in \mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$ et que u est solution de l'équation :

$$\partial_t u + \mathrm{Op}(a_t)u = f, \qquad u(0) = u_0$$

Exercice 2 : résolution d'un problème non-linéaire
On suppose dans tout l'exercice $s > n/2$.
1. Soient $u, v \in H^s$. Montrer que $uv \in H^s$ et :

$$||uv||_{H^s} \leq C||u||_{H^s}||v||_{H^s}$$

[Indication : on pourra montrer et utiliser l'inégalité :

$$(1+||\xi||^2)^{s/2} \leq 2^s((1+||\xi-\eta||^2)^{s/2} + (1+||\eta||^2)^{s/2})$$

ainsi que l'inégalité de Young :

$$||u \star v||_{L^p} \leq ||u||_{L^1}||v||_{L^p} \quad]$$

Soit a_t un symbole hyperbolique dépendant du temps. On veut résoudre le problème suivant, pour $u_0 \in H^s$:

$$\partial_t u + \mathrm{Op}(a_t)u = u^2, \qquad u(0) = u_0 \tag{2}$$

Par abus de language, on notera également u_0 la fonction constante $t \in [0;T] \to u_0 \in H^s$.
2. Soit $T > 0$. Pour tout n, on se donne (grâce à l'exercice précédent) $u_{n+1} \in \mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$ solution de l'équation :

$$\partial_t u_{n+1} + \mathrm{Op}(a_t)u_{n+1} = u_n^2, \qquad u_{n+1}(0) = u_0$$

Montrer qu'il existe C telle que, si $T \leq \frac{C}{||u_0||_{H^s}}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$.
3. En déduire l'existence d'une solution $u \in \mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$ au problème (2).