École Normale Supérieure Analyse des équations aux dérivées partielles
26 novembre 2015

TD n$^{\text{o}}$9 : propagation des singularités

Exercice 1 : équation de transport

Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe $A, B > 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad ||V(x)|| \leq A + B||x||$$

1. Montrer que, pour tout x, l'équation suivante a une unique solution $X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & V \circ X \\ X(0) & = & x \end{array} \right.$$

On note $\Phi^t(x) = X(t)$.

2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, Φ^t est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

3. On considère maintenant l'équation suivante, pour une fonction $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t} u + \langle V, \nabla_x u \rangle & = & 0 \\ u_{|t=0} & = & u_0 \end{array} \right.$$

Montrer que l'unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de cette équation est $u(t,x) = u_0 \circ \Phi^{-t}(x)$.

Exercice 2 : équation différentielle hamiltonienne

1. Soit $b(x, \xi) \in S^1$, à valeurs réelles. On considère la solution $t \to \Phi^t(x, \xi)$ du système :

$$\begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt} = \nabla_\xi b(x(t), \xi(t)), & \qquad \dfrac{d\xi}{dt} = -\nabla_x b(x(t), \xi(t)), \\ x(0) = x, & \qquad \xi(0) = \xi \end{array}$$

Montrer que, pour tout t, le flot $\Phi^t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ est bien défini et est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

2. On note $\Phi^t(x, \xi) = (X^t(x, \xi), \Xi^t(x, \xi))$.

a) Montrer qu'on peut choisir $t_0 > 0$ tel que, pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0; t_0]$:

$$||\Xi^t(x,\xi) - \xi|| \leq \frac{1}{2}(1 + ||\xi||)$$

[Indication : commencer par montrer qu'on peut choisir $t_1 > 0$ tel que, pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0; t_1]$, $||\Xi^t(x,\xi)|| \leq 2(1 + ||\xi||)$.]
b) Pour tous t, x, ξ, on pose $S_t(x,\xi) = \left(\begin{smallmatrix} d_x X^t & \langle\xi\rangle d_\xi X^t \\ \langle\xi\rangle^{-1} d_x \Xi^t & d_\xi \Xi^t \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, où $\langle\xi\rangle = (1 + ||\xi||^2)^{1/2}$ et où $d_x X^t, d_\xi X^t, d_x \Xi^t, d_\xi \Xi^t$ sont identifiées à des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que S_t est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} S_t(x,\xi) &= A(t,x,\xi) S_t(x,\xi) \\ S_0(x,\xi) &= s_0 \end{cases}$$

pour une application $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et un élément $s_0 \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ qu'on calculera.
c) Soient α, β des multi-indices quelconques. Montrer qu'il existe $c_{\alpha,\beta}, c'_{\alpha,\beta} > 0$ tels que, pour tout $t \in [0; t_0]$:

$$\begin{aligned} \forall x, \xi, \qquad & ||\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta X^t(x,\xi)|| \leq c_{\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{-|\beta|} \qquad \text{si } |\alpha| + |\beta| > 0 \\ \forall x, \xi, \qquad & ||\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \Xi^t(x,\xi)|| \leq c'_{\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{1-|\beta|} \end{aligned}$$

d) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{R}$ et tout $p_0 \in S^r$, $p_0(\Phi^t(x,\xi))$ est un symbole de S^r, uniformément en $t \in [0; t_0]$.
3. En itérant la résolution précédente, montrer que, pour tout T, $p_0(\Phi^t(x,\xi))$ définit un symbole de S^r, uniformément en $t \in [0; T]$.

Exercice 3 : théorème d'Egorov

On considère un symbole $a(x,\xi) = a^1 + a^0$ avec $a^1 \in S^1$ à valeurs imaginaires pures. On note H le champ de vecteurs suivant :

$$H = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial a^1}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial a^1}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$$

On note $S(t,s)$ l'opérateur qui à $u_0 \in L^2$ associe la solution $u(t) = S(t,s)u_0$ de l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{Op}(a)u &= 0 \\ u(s) &= u_0 \end{cases}$$

Soit $P_0 = \mathrm{Op}(p_0) \in \mathrm{Op}(S^0)$.
1. On pose $P(t) = S(t,0)P_0S(0,t)$. Montrer que P vérifie :

$$\begin{cases} P'(t) + [\mathrm{Op}(a), P(t)] & = & 0 \\ P(0) & = & P_0 \end{cases}$$

2. On définit $q^{(0)}$ par :

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + H\right) q^{(0)}(t,x,\xi) & = & 0 \\ q^{(0)}(0,x,\xi) & = & p_0(x,\xi) \end{cases}$$

a) Calculer $q^{(0)}$ en fonction du flot Φ^t introduit à l'exercice 2, pour le symbole $b = \frac{1}{i}a^1$. Montrer qu'il est bien défini et que, pour tout t, $q^{(0)}(t,.,.)$ appartient à S^0.
b) Montrer que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Op}(q^{(0)}) + [\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(q^{(0)})] = \mathrm{Op}(b^{(-1)}) \in \mathrm{Op}(S^{-1})$$

3. On définit maintenant $q^{(-1)}$ par :

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + H\right) q^{(-1)}(t,x,\xi) & = & -b^{(-1)}(t,x,\xi) \\ q^{(-1)}(0,x,\xi) & = & 0 \end{cases}$$

a) Pour tout s, on définit $\tilde{q}^{(-1)}(s,.,.,.)$ comme la solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + H\right) \tilde{q}^{(-1)}(s,t,x,\xi) & = & 0 \\ \tilde{q}^{(-1)}(s,s,x,\xi) & = & -b^{(-1)}(s,x,\xi) \end{cases}$$

Montrer que $q^{(-1)}(t,x,\xi) = \int_0^t \tilde{q}^{(-1)}(s,t,x,\xi)ds$ et en déduire que, pour tout t, $q^{(-1)}(t,.,.)$ appartient à S^{-1}.
b) Montrer que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Op}(q^{(0)} + q^{(-1)}) + [\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(q^{(0)} + q^{(-1)})] = \mathrm{Op}(b^{(-2)}) \in \mathrm{Op}(S^{-2})$$

4. En continuant le processus, montrer qu'il existe $q_t \in S^0$, de classe $\mathcal{C}^1$ en t, tel que, pour tout t, $q_t(x,\xi) - p_0(\Phi^{-t}(x,\xi)) \in S^{-1}$ et :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Op}(q_t) + [\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(q_t)] & = & \mathrm{Op}(r_t) \\ q_0(x,\xi) & = & p_0(x,\xi) \end{cases}$$

avec $r_t \in S^{-\infty}$ pour tout t, uniformément en t sur tout compact de $\mathbb{R}$.

5. Soit $f \in H^{-\infty}$. Montrer que, pour tout t, $S(t,0)P_0S(0,t)f - \mathrm{Op}(q_t)f \in H^{\infty}$. [Indication : commencer par montrer que, pour tout t, $S(t,0)P_0f - \mathrm{Op}(q_t)S(t,0)f \in H^{\infty}$.]