Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$9

Corrigé

Exercice 1

1. Puisque V est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz : l'équation admet une unique solution maximale $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.
Sur son intervalle de définition, X est $\mathcal{C}^\infty$. En effet, $X' = V \circ X$ donc, si X est de classe $\mathcal{C}^k$, X' aussi, donc X est en fait de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.
Montrons $I = \mathbb{R}$. Pour tout $t \in I$:

$$||X'(t)|| = ||V \circ X(t)|| \leq A + B||X(t)||$$

En posant $N(t) = ||X(t)||^2$, on a, pour tout t, par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} N'(t) &= 2\,\langle X(t), X'(t)\rangle \\ &\leq 2||X(t)||\,||X'(t)|| \\ &\leq 2A||X(t)|| + 2B||X(t)||^2 \\ &\leq A + (A+2B)N(t) \end{aligned}$$

On en déduit, par le lemme de Gronwall :

$$\forall t \geq 0, \qquad N(t) \leq N(0)e^{(A+2B)t} + \frac{A}{A+2B}\left(e^{(A+2B)t} - 1\right)$$

et donc, si $I \cap \mathbb{R}^+$ est borné, N (et donc $||X||$) est bornée sur $I \cap \mathbb{R}^+$. C'est en contradiction avec le théorème de sortie des compacts.
Donc I n'est pas borné supérieurement. De même, I n'est pas borné inférieurement : $I = \mathbb{R}$.

2. On utilise le théorème suivant, vu en cours de topologie, analyse et calcul différentiel.

Théorème 1.1. *Soit $f : (t, \lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to f(t, \lambda, x) \in \mathbb{R}^n$ continue. On suppose que f est dérivable par rapport à λ et x et que $d_{(\lambda,x)}f$ est continue en t, λ, x.*
Soit u la solution maximale de l'équation suivante.

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) &=& f(t, \lambda, u(t)) \\ u(0) &=& x \end{array}\right.$$

On pose $\Phi^t(\lambda, x) = u(t)$.
Pour tout t, Φ^t est $\mathcal{C}^1$ en x et λ sur son ensemble de définition. De plus, $d_{(x,\lambda)}\Phi^t$ est dérivable par rapport à t et vérifie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t} d_{(\lambda,x)}\Phi^t(\lambda, x) &=& d_\lambda f(t, \lambda, \Phi^t(\lambda, x)) \circ \pi_\lambda + d_x f(t, \lambda, \Phi^t(\lambda, x)) \circ d_{(\lambda,x)}\Phi^t(\lambda, x) \\ d_{(\lambda,x)}\Phi^0(\lambda, x) &=& \pi_x \end{array}\right.$$

où $\pi_\lambda : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ et $\pi_x : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont les projections canoniques.

En appliquant récursivement ce théorème, on montre que, si f est $\mathcal{C}^\infty$, alors Φ^t est $\mathcal{C}^\infty$ en (λ, x), pour tout t.
En appliquant ce résultat à l'équation différentielle de la question 1., on obtient que Φ^t est de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour tout t. Comme $\Phi^t \circ \Phi^{-t} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, c'est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.
3. Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Notons $v : (t, x) \to u(t, \Phi^t(x))$. Alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t, \Phi^t(x)) + \left\langle V(\Phi^t(x)), \nabla_x u(t, \Phi^t(x)) \right\rangle$$

Puisque Φ^t est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme, cela entraîne que u est solution de l'équation voulue si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) & = & 0 \\ v(0, x) & = & u_0(x) \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que u est solution de l'équation voulue si et seulement si $v(t, x) = u_0(x)$ pour tous $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$, ce qui est équivalent à $u(t, x) = u_0 \circ \Phi^{-t}(x)$.

Exercice 2

1. a) Notons $B(x, \xi) = \left(\begin{smallmatrix} \nabla_\xi b(x,\xi) \\ -\nabla_x b(x,\xi) \end{smallmatrix} \right)$. L'équation qu'on considère est la suivante :

$$y'(t) = B(y(t))$$
$$y(0) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi \end{smallmatrix} \right)$$

Puisque b appartient à S^1, il existe $c > 0$ tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$||B(y)|| \leq c(1 + ||y||)$$

On est donc dans le cadre des questions 1. et 2. de l'exercice 1. Ainsi, pour tout (x, ξ), cette équation a une unique solution maximale, qui est définie sur tout $\mathbb{R}$ et, pour tout t, le flot Φ^t est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.
2. a) Puisque $b \in S^1$, il existe $c > 0$ tel que, pour tous x, ξ :

$$||\nabla_x b(x, \xi)|| \leq c(1 + ||\xi||)$$

ce qui entraîne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ||\frac{d\xi}{dt}|| & \leq & c(1 + ||\xi(t)||) \\ ||\xi(0)|| & = & ||\xi|| \end{array} \right.$$

D'après le lemme de Gronwall, comme dans l'exercice 1, on a pour tout t :

$$||\xi(t)||^2 \leq ||\xi(0)||^2 e^{3ct} + \frac{e^{3ct} - 1}{3}$$

En choisissant t_1 tel que $e^{3ct_1} < 4$, on a, pour tout $t \leq t_1$:

$$||\xi(t)|| \leq 2(1 + ||\xi||)$$

Sur $[0;t_1]$:

$$\left|\left|\frac{d\xi}{dt}\right|\right| \leq c(1+||\xi(t)||) \leq c(3+2||\xi||)$$

Donc, pour tout $t\in[0;t_1]$:

$$||\xi(t)-\xi|| \leq \int_0^t \left|\left|\frac{d\xi}{dt}\right|\right| \leq ct(3+2||\xi||)$$

Si on choisit t_0 tel que $3ct_0 \leq 1/2$, on a bien, pour tout $t\leq t_0$:

$$||\xi(t)-\xi|| \leq \frac{1}{2}(1+||\xi||)$$

b) Par le théorème qu'on a déjà utilisé à l'exercice 1, la différentielle de Φ_t vérifie l'équation suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t}\left[d_{(x,\xi)}\Phi^t(x,\xi)\right] & = & d_{(x,\xi)}B(\Phi^t(x,\xi))\circ d_{(x,\xi)}\Phi^t(x,\xi) \\ d_{(x,\xi)}\Phi^0(x,\xi) & = & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2n}} \end{array}\right.$$

c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} d_xX^t(x,\xi) & d_\xi X^t(x,\xi) \\ d_x\Xi^t(x,\xi) & d_\xi\Xi^t(x,\xi)\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} d_x\nabla_\xi b\circ\Phi^t(x,\xi) & d_\xi\nabla_\xi b\circ\Phi^t(x,\xi) \\ -d_x\nabla_x b\circ\Phi^t(x,\xi) & -d_\xi\nabla_x b\circ\Phi^t(x,\xi)\end{pmatrix} \\ & & \times\begin{pmatrix} d_xX^t(x,\xi) & d_\xi X^t(x,\xi) \\ d_x\Xi^t(x,\xi) & d_\xi\Xi^t(x,\xi)\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_xX^0(x,\xi) & d_\xi X^0(x,\xi) \\ d_x\Xi^0(x,\xi) & d_\xi\Xi^0(x,\xi)\end{pmatrix} & = & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2n}} \end{array}\right.$$

et donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} d_xX^t(x,\xi) & \langle\xi\rangle\, d_\xi X^t(x,\xi) \\ \langle\xi\rangle^{-1} d_x\Xi^t(x,\xi) & d_\xi\Xi^t(x,\xi)\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} d_x\nabla_\xi b\circ\Phi^t(x,\xi) & \langle\xi\rangle\, d_\xi\nabla_\xi b\circ\Phi^t(x,\xi) \\ -\langle\xi\rangle^{-1} d_x\nabla_x b\circ\Phi^t(x,\xi) & -d_\xi\nabla_x b\circ\Phi^t(x,\xi)\end{pmatrix} \\ & & \times\begin{pmatrix} d_xX^t(x,\xi) & \langle\xi\rangle\, d_\xi X^t(x,\xi) \\ \langle\xi\rangle^{-1} d_x\Xi^t(x,\xi) & d_\xi\Xi^t(x,\xi)\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_xX^0(x,\xi) & \langle\xi\rangle\, d_\xi X^0(x,\xi) \\ \langle\xi\rangle^{-1} d_x\Xi^0(x,\xi) & d_\xi\Xi^0(x,\xi)\end{pmatrix} & = & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2n}} \end{array}\right.$$

C'est le résultat voulu, avec $s_0=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2n}}$ et :

$$A(t,x,\xi) = \begin{pmatrix} d_x\nabla_\xi b\circ\Phi^t(x,\xi) & \langle\xi\rangle\, d_\xi\nabla_\xi b\circ\Phi^t(x,\xi) \\ -\langle\xi\rangle^{-1} d_x\nabla_x b\circ\Phi^t(x,\xi) & -d_\xi\nabla_x b\circ\Phi^t(x,\xi)\end{pmatrix}$$

c) On procède par récurrence sur $|\alpha|+|\beta|$. Pour $|\alpha|+|\beta|=0$, c'est vrai. En effet, la deuxième inégalité est impliquée par la question 2.a). La première est triviale.
Supposons maintenant qu'on l'a démontré pour $|\alpha|+|\beta|\leq k$ et démontrons-le pour $|\alpha|+|\beta| = k+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha|+|\beta|<k$, il existe $C_{\alpha,\beta}>0$ vérifiant :

$$\forall t\in[0;t_0], \forall x,\xi, \qquad ||\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta S_t(x,\xi)|| \leq C_{\alpha,\beta}\,\langle\xi\rangle^{-|\beta|} \tag{1}$$

De plus, pour tous α, β tels que $|\alpha| + |\beta| \leq k$, il existe $C'_{\alpha,\beta} > 0$ vérifiant :

$$\forall t \in [0; t_0], \forall x, \xi \qquad ||\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta A(t, x, \xi)|| \leq C'_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\beta|} \tag{2}$$

Cette dernière inégalité se vérifie en calculant, par la formule de Leibniz, les dérivées partielles des coefficients de $A(t, ., .)$ puis en utilisant l'hypothèse de récurrence et les deux inégalités suivantes :

$$\forall \alpha', \beta', \exists D_{\alpha',\beta'} > 0, \qquad \forall x, \xi, |\partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} b(x, \xi)| \leq \langle \xi \rangle^{1-|\beta|}$$

et :

$$\begin{aligned} &\forall t \in [0; t_0], \forall x, \xi, \qquad \frac{1}{2}||\xi|| - \frac{1}{2} \leq ||\Phi^t(x, \xi)|| \leq \frac{3}{2}||\xi|| + \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \qquad &\forall t \in [0; t_0], \forall x, \xi, \qquad \frac{1}{2} \langle \xi \rangle \leq \left\langle \Phi^t(x, \xi) \right\rangle \leq \sqrt{3} \langle \xi \rangle \end{aligned}$$

Pour tous α, β tels que $|\alpha| + |\beta| \leq k$, en dérivant (α, β) fois l'équation de la question précédente, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_t(x, \xi) & = & R(t, x, \xi) + A(t, x, \xi) \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_t(x, \xi) \\ \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_0(x, \xi) & = & s'_0 \end{array} \right.$$

où $s'_0 = s_0$ si $\alpha = \beta = 0$ et $s'_0 = 0$ sinon et $R(t, x, \xi)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} A(t, x, \xi) \partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} S_t(x, \xi)$, avec $|\alpha'| + |\beta'| < |\alpha| + |\beta| \leq k$. D'après les inégalités (1) et (2), il existe $D > 0$ telle que :

$$\forall t \in [0, t_0], \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad ||R(t, x, \xi)|| \leq D \langle \xi \rangle^{-|\beta|}$$

Vu la définition de s'_0, on a aussi $||s'_0|| \leq D' \langle \xi \rangle^{-|\beta|}$ (puisque, si $\beta > 0$, alors $s'_0 = 0$).
Ainsi, $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_t$ vérifie les inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left|\left| \frac{\partial}{\partial t} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_t(x, \xi) \right|\right| & \leq & D \langle \xi \rangle^{-|\beta|} + D \left|\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_t(x, \xi) \right|\right| \\ \left|\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_0(x, \xi) \right|\right| & \leq & D' \langle \xi \rangle^{-|\beta|} \end{array} \right.$$

Le lemme de Gronwall, appliqué à $\langle \xi \rangle^{|\beta|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_t(x, \xi)$, entraîne l'existence d'une constante $\mathcal{D}$ telle que, pour tous x, ξ et tout $t \in [0; t_0]$:

$$||\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_t(x, \xi)|| \leq \mathcal{D} \langle \xi \rangle^{-|\beta|}$$

En calculant explicitement la dérivée (α, β)-ième de S_t et en utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} ||\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta d_x X^t|| &\leq \mathcal{D}' \langle \xi \rangle^{-|\beta|} \\ ||\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta d_\xi X^t|| &\leq \mathcal{D}' \langle \xi \rangle^{-|\beta|-1} \\ ||\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta d_x \Xi^t|| &\leq \mathcal{D}' \langle \xi \rangle^{-|\beta|+1} \end{aligned}$$

$$||\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta d_\xi \Xi^t|| \leq \mathcal{D}' \langle\xi\rangle^{-|\beta|}$$

ce qui démontre l'hypothèse de récurrence au rang $k+1$.
d) Pour tous multi-indices α, β, $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_0 \circ \Phi^t$ est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\left(\left(\partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} p_0\right) \circ \Phi^t\right) \left(\partial_x^{a_1} \partial_\xi^{b_1} X_{i_1}^t\right) ... \left(\partial_x^{a_{|\alpha'|}} \partial_\xi^{b_{|\alpha'|}} X_{i_{|\alpha'|}}^t\right) \left(\partial_x^{a'_1} \partial_\xi^{b'_1} \Xi_{j_1}^t\right) ... \left(\partial_x^{a'_{|\beta'|}} \partial_\xi^{b'_{|\beta'|}} \Xi_{j_{|\beta'|}}^t\right) \qquad (3)$$

avec $a_1 + ... + a_{|\alpha'|} + a'_1 + ... + a'_{|\beta'|} = \alpha$ et $b_1 + ... + b_{|\alpha'|} + b'_1 + ... + b'_{|\beta'|} = \beta$.
Pour $t \in [0; t_0]$:

$$\left|\left(\partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} p_0\right) \circ \Phi^t(x,\xi)\right| \leq C \left\langle \Xi^t(x,\xi)\right\rangle^{r-|\beta'|} \leq C' \langle\xi\rangle^{r-|\beta'|}$$

puisque, comme on l'a vu au cours de la question 2.c), $\frac{1}{2}\langle\xi\rangle \leq \langle \Xi^t(x,\xi)\rangle \leq \sqrt{3}\langle\xi\rangle$ si $t \in [0; t_0]$.
Un terme de la forme (3) est donc majoré, grâce à cette estimation et à la question précédente, par :

$$\tilde{C} \langle\xi\rangle^{r-|\beta'|} \langle\xi\rangle^{-|b_1|} ... \langle\xi\rangle^{-|b_{|\alpha'|}|} \langle\xi\rangle^{1-|b'_1|} ... \langle\xi\rangle^{1-|b'_{|\beta'|}|} = \tilde{C} \langle\xi\rangle^{r-|\beta|}$$

Cela démontre qu'il existe $E > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0; t_0], \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (p_0 \circ \Phi^t)(x,\xi)| \leq E \langle\xi\rangle^{r-|\beta|}$$

3. On a vu à la question précédente que $p_0 \circ \Phi^t$ était dans S^r pour tout $t \in [0; t_0]$, uniformément en t. Puisque $p_0 \circ \Phi^{t_0} \in S^r$, on a aussi que, pour tout $t \in [0; t_0]$, $p_0 \circ \Phi^{t_0+t} = (p_0 \circ \Phi^{t_0}) \circ \Phi^t$ appartient à S^r, uniformément en t.
Cela démontre que, pour tout $t \in [0; 2t_0]$, $p_0 \circ \Phi^t$ appartient à S^r, uniformément en t.
En procédant ainsi, par récurrence, on montre, pour tout $N \in \mathbb{N}$, que $p_0 \circ \Phi^t$ appartient à S^r pour tout $t \in [0; Nt_0]$, uniformément en t. Pour $Nt_0 \geq T$, cela implique le résultat voulu.

Exercice 3

1. D'après le chapitre du cours sur les systèmes hyperboliques, $S(t,s)$ est bien défini. Il est de plus borné sur tout compact de $\mathbb{R}^2$, en tant qu'opérateur de L^2 vers L^2 (Lemme 6.5 du cours). De plus, S appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_c(L^2, L^2))$ (cela se démontre également à partir du lemme 6.5, en commençant par la continuité en t au point $(0,0)$).
Par définition, pour toute $u \in L^2$:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,s)u + \mathrm{Op}(a)S(t,s)u = 0$$

et comme $S(t,s) = S(-s,-t)$, on a aussi :

$$\frac{\partial S}{\partial s}(t,s)u - \mathrm{Op}(a)S(t,s)u = 0$$

ce qui montre en particulier qu'on a $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_c(L^2, H^{-1}))$.

Puisque $S(0,t)S(t,0) = \mathrm{Id}$:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(0,t)S(t,0) + S(0,t)\frac{\partial S}{\partial t}(t,0) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial S}{\partial t}(0,t) = S(0,t)\,\mathrm{Op}(a)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} P'(t) &= \frac{\partial S}{\partial t}(t,0)P_0S(0,t) + S(t,0)P_0\frac{\partial S}{\partial s}(0,t) \\ &= -\,\mathrm{Op}(a)S(t,0)P_0S(0,t) + S(t,0)P_0S(0,t)\,\mathrm{Op}(a) \\ &= -[\mathrm{Op}(a), P(t)] \end{aligned}$$

De plus, $P(0) = S(0,0)P_0S(0,0) = P_0$.
2. a) On définit le flot Φ^t comme à l'exercice 2 :

$$\frac{d}{dt}\Phi^t(x,\xi) = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \nabla_\xi a^1 \circ \Phi^t \\ -\nabla_x a^1 \circ \Phi^t \end{pmatrix}$$

D'après l'exercice 1., $q^{(0)}(t,x,\xi) = p_0 \circ \Phi^{-t}(x,\xi)$. D'après l'exercice 2., $q^{(0)}(t,.,.)$ est donc un symbole de S^0 pour tout $t \in \mathbb{R}$.
b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Op}(q^{(0)}) + [\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(q^{(0)})] &= \mathrm{Op}\left(\frac{\partial}{\partial t}q^{(0)}\right) + [\mathrm{Op}(a^1), \mathrm{Op}(q^{(0)})] + [\mathrm{Op}(a^{(0)}), \mathrm{Op}(q^{(0)})] \\ &= \mathrm{Op}\left(-Hq^{(0)}\right) + [\mathrm{Op}(a^1), \mathrm{Op}(q^{(0)})] + [\mathrm{Op}(a^{(0)}), \mathrm{Op}(q^{(0)})] \end{aligned}$$

On a $[\mathrm{Op}(a^{(0)}), \mathrm{Op}(q^{(0)})] \in \mathrm{Op}(S^{-1})$, d'après les résultats de calcul symbolique.
À un élément de $\mathrm{Op}(S^{(-1)})$ près :

$$\begin{aligned} [\mathrm{Op}(a^1), \mathrm{Op}(q^{(0)})] &= \mathrm{Op}(a^1)\,\mathrm{Op}(q^{(0)}) - \mathrm{Op}(q^{(0)})\,\mathrm{Op}(a^1) \\ &= \mathrm{Op}\left(a^1q^{(0)} + \frac{1}{i}\sum_{j=1}^n \partial_{\xi_j}a^1\partial_{x_j}q^{(0)}\right) - \mathrm{Op}\left(q^{(0)}a^1 + \frac{1}{i}\sum_{j=1}^n \partial_{\xi_j}q^{(0)}\partial_{x_j}a^1\right) \\ &= \mathrm{Op}\left(Hq^{(0)}\right) \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Op}(q^{(0)}) + [\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(q^{(0)})] \in \mathrm{Op}(S^{-1})$.
3. a) La fonction $\tilde{q}^{(-1)}$ est bien définie et vaut $\tilde{q}^{(-1)}(s,t,x,\xi) = -b^{(-1)}(s, \Phi^{-(t-s)}(x,\xi))$.
De plus, $q^{(-1)}(t,x,\xi) = \int_0^t \tilde{q}^{(-1)}(s,t,x,\xi)ds$. En effet, en dérivant, on vérifie que $q^{(-1)}$ est bien solution de l'équation. De plus, la solution est unique (car si deux solutions existent, la différence est solution d'une équation de transport avec condition initiale nulle donc, d'après l'exercice 1, est nulle).
D'après l'exercice 2, $\tilde{q}^{(-1)}(s,t,.,.)$ appartient à S^{-1} pour tous s,t (de manière uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^2$). Donc, par les théorèmes de dérivation sous le signe some, $q^{(-1)}(t,.,.)$ aussi, pour tout t (et uniformément en t sur tout compact de $\mathbb{R}$).

b) De la même façon qu'à la question 2.b), on a, modulo un élément de $\mathrm{Op}(S^{-2})$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Op}(q^{(-1)}) + [\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(q^{(-1)})] &= \mathrm{Op}\left(\frac{\partial}{\partial t}q^{(-1)}\right) + [\mathrm{Op}(a^1), \mathrm{Op}(q^{(-1)})] + [\mathrm{Op}(a^{(0)}), \mathrm{Op}(q^{(-1)})] \\
&= \mathrm{Op}\left(\frac{\partial}{\partial t}q^{(-1)}\right) + [\mathrm{Op}(a^1), \mathrm{Op}(q^{(-1)})] \\
&= \mathrm{Op}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + H\right)q^{(-1)}\right) \\
&= -\,\mathrm{Op}(b^{(-1)})
\end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec celui de la question b :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Op}(q^{(0)} + q^{(-1)}) + [\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(q^{(0)} + q^{(-1)})] \in \mathrm{Op}(S^{-2})$$

4. En utilisant la même méthode qu'à la question 3., on montre par récurrence sur n qu'il existe $(q^{(-n)}(t,x,\xi))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

- Pour tout n, $q^{(-n)} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, S^{-n})$.
- Pour tout n, $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Op}(q^{(0)} + ... + q^{(-n)}) + [\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(q^{(0)} + ... + q^{(-n)})] \in \mathrm{Op}(S^{-(n+1)})$.
- $q^{(-n)}(0,x,\xi) = 0$ si $n \geq 1$.

Lemme 3.1. *Il existe $t \in \mathbb{R} \to q_t \in S^0$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$q_t \sim \sum_{n\in\mathbb{N}} q^{(-n)}(t,.,.) \quad et \quad \frac{d}{dt}q_t \sim \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d}{dt}q^{(-n)}(t,.,.)$$

et telle que $q_0 = p_0$.

Démonstration. On reprend le schéma de la démonstration de l'exercice 1 du TD 4. On ne donne ici que les grandes lignes ; les détails sont les mêmes que dans le TD 4.
On fixe χ de classe $\mathcal{C}^\infty$ valant 1 sur $B(0,1)$ et 0 sur $\mathbb{R}^n - B(0,2)$.
Il existe une suite $\epsilon_n \to 0$ telle que, pour tous α, β, N, si on pose $\tilde{q}_t^{(-n)}(x,\xi) = (1-\chi(\epsilon_n\xi))q^{(-n)}(t,x,\xi)$, on a, pour tout n assez grand :

$$\begin{aligned}
\forall x,\xi, \quad ,\forall t \in [-N;N], \qquad & |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\tilde{q}_t^{(-n)}| \leq \frac{1}{2^n}(1+||\xi||)^{1-n-|\beta|} \\
\forall x,\xi, \quad ,\forall t \in [-N;N], \qquad & \left|\frac{d}{dt}\left(\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\tilde{q}_t^{(-n)}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n}(1+||\xi||)^{1-n-|\beta|}
\end{aligned}$$

On peut de plus prendre $\epsilon_0 = +\infty$, c'est à dire $\tilde{q}_t^{(0)}(x,\xi) = q^{(0)}(t,x,\xi)$.
On pose $q_t = \sum_{n\in\mathbb{N}}\tilde{q}_t^{(-n)}$. Par convergence uniforme de la série et de ses dérivées (d'ordre quelconque par rapport à x et ξ et d'ordre au plus 1 par rapport à t), il s'agit d'une fonction $\mathcal{C}^1$ en t et $\mathcal{C}^\infty$ en x,ξ.
Pour tout t et pour tout n, $q_t - \sum_{j<n}\tilde{q}_t^{(-j)} \in S^{-n}$ et $\frac{d}{dt}q_t - \sum_{j<n}\frac{d}{dt}\tilde{q}_t^{(-j)} \in S^{-n}$.

En $t=0$:

$$\begin{aligned} q_0(x,\xi) &= \sum_{n\in\mathbb{N}}(1-\chi(\epsilon_n\xi))q^{(-n)}(0,x,\xi) \\ &= (1-\chi(\epsilon_0\xi))q^{(0)}(0,x,\xi) \\ &= q^{(0)}(0,x,\xi) \\ &= p_0(x,\xi) \end{aligned}$$

$\square$

En définissant q_t comme dans le lemme, on a, pour tout n, pour un certain $R_n \in \mathrm{Op}(S^{-(n+1)})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Op}(q_t) + [\mathrm{Op}(a),\mathrm{Op}(q_t)] &= \mathrm{Op}\left(\frac{\partial}{\partial t}q_t\right) + [\mathrm{Op}(a),\mathrm{Op}(q_t)] \\ &= \mathrm{Op}(\frac{\partial}{\partial t}(q^{(0)}+...+q^{(-n)})) + [\mathrm{Op}(a),\mathrm{Op}(q^{(0)}+...+q^{(-n)})] + R_n \\ &= \mathrm{Op}(b^{-(n+1)}) + R_n \\ &\in \mathrm{Op}(S^{-(n+1)}) \end{aligned}$$

Puisque c'est vrai pour tout n, $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Op}(q_t) + [\mathrm{Op}(a),\mathrm{Op}(q_t)] \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.
De plus, le lemme affirme qu'on a $q_0(x,\xi) = p_0(x,\xi)$.
Enfin, on a, pour tout t, $q_t - q^{(0)}(t,.,.) \in S^{-1}$. Puisque $q^{(0)}(t,x,\xi) = p_0(\Phi^{-t}(x,\xi))$, toutes les conditions voulues sont donc vérifiées.
5. Soit $s\in\mathbb{R}$ quelconque. De même qu'à la première question, $t\to S(t,0)\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathcal{L}_c(H^s,H^s))\cap\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathcal{L}_c(H^s,H^{s-1}))$. On a de plus vu qu'on avait $\frac{d}{dt}S(t,0) = -\mathrm{Op}(a)S(t,0)$.
D'après la question 4., $t\to\mathrm{Op}(q_t)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathcal{L}_c(H^s,H^s))$.
Pour toute $f\in H^s$, l'application $L : t\to S(t,0)P_0f - \mathrm{Op}(q_t)S(t,0)f$ est donc dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},H^{s-1})$.
De plus :

$$\begin{aligned} L'(t) &= -\mathrm{Op}(a)S(t,0)P_0f - \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Op}(q_t)\right)S(t,0)f + \mathrm{Op}(q_t)\,\mathrm{Op}(a)S(t,0)f \\ &= -\mathrm{Op}(a)S(t,0)P_0f - \left(\mathrm{Op}(r_t) - [\mathrm{Op}(a),\mathrm{Op}(q_t)]\right)S(t,0)f + \mathrm{Op}(q_t)\,\mathrm{Op}(a)S(t,0)f \\ &= -\mathrm{Op}(a)S(t,0)P_0f + \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(q_t)S(t,0)f + \mathrm{Op}(r_t)S(t,0)f \\ &= -\mathrm{Op}(a)L(t) + \mathrm{Op}(r_t)S(t,0)f \end{aligned}$$

On en déduit que $L\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},H^{s-1})$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} L'(t)+\mathrm{Op}(a)L(t) &=& \mathrm{Op}(r_t)S(t,0)f \\ L(0) &=& P_0f - \mathrm{Op}(q_0)f = 0 \end{array}\right.$$

Soit $T>0$ quelconque. D'après le cours (lemme 6.5), il existe $C>0$ (indépendante de f) telle que, pour tout $t\in[-T;T]$:

$$||L(t)||_{H^{s-1}} \le C\int_{-T}^{T} ||\,\mathrm{Op}(r_\tau)S(\tau,0)f||_{H^{s-1}}d\tau$$

Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
||S(t,0)P_0 f - \mathrm{Op}(q_t)S(t,0)f||_{H^{s-1}} &\leq C \int_{-T}^{T} ||\,\mathrm{Op}(r_\tau)S(\tau,0)f||_{H^{s-1}} d\tau \\
&\leq 2CT \sup_{\tau \in [-T;T]} ||\,\mathrm{Op}(r_\tau)||_{H^r \to H^{s-1}} \sup_{\tau \in [-T;T]} ||S(\tau,0)||_{H^r \to H^r} ||f||_{H^r}
\end{aligned}$$

Cela démontre que, pour tout t, $S(t,0)P_0 - \mathrm{Op}(q_t)S(t,0)$ définit, sur $H^r \cap H^s$ muni de la norme $||.||_{H^r}$, un opérateur continu vers H^{s-1}. Puisque, de plus, cet opérateur est défini sur tout H^r et continu de H^r vers H^r, on en déduit qu'il est continu de H^r vers H^{s-1}.
On a donc montré que, pour tous r, s et pour tout t, $S(t,0)P_0 - \mathrm{Op}(q_t)S(t,0)$ est un opérateur continu de H^r vers H^{s-1}. Donc, pour toute $f \in H^{-\infty}$, pour tout t, $S(t,0)P_0 f - \mathrm{Op}(q_t)S(t,0)f \in H^{s-1}$ pour tout s, c'est-à-dire qu'on a $S(t,0)P_0 f - \mathrm{Op}(q_t)S(t,0)f \in H^\infty$.
Si $f \in H^{-\infty}$, $S(0,t) \in H^{-\infty}$ donc ce résultat entraîne également qu'on a $S(t,0)P_0 S(0,t)f - \mathrm{Op}(q_t)f \in H^\infty$ pour tout t et toute $f \in H^{-\infty}$.