Chapitre 1, exercice 12

1. Montrons d'abord que $\sup(A)$ existe. Puisque A est non-vide, il suffit de montrer qu'elle est majorée.
Soit M un élément de B quelconque. Pour tout $x \in A$, d'après la propriété de l'énoncé (appliquée avec $a = x$ et $b = M$), on a $x \leq M$. Donc M est un majorant de A.
Ainsi, A est bien non-vide et majorée ; elle admet une borne supérieure.

De même, soit $m \in A$ quelconque. Pour tout $y \in B$, d'après la propriété de l'énoncé, $m \leq y$. Donc m est un minorant de B.
Ainsi, B est non-vide et minorée ; elle admet une borne supérieure.

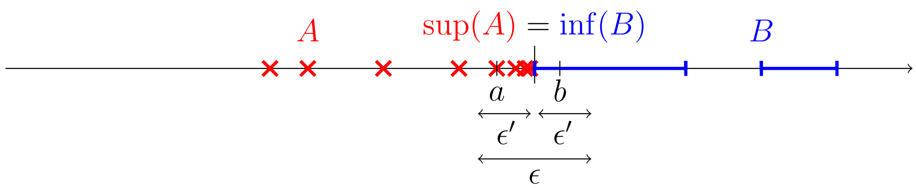
Pour montrer l'inégalité $\sup(A) \leq \inf(B)$, commençons par montrer que $\sup(A)$ est un minorant de B. Il s'agit donc de montrer que, pour tout $y \in B$, $\sup(A) \leq y$.
Soit $y \in B$ quelconque. Comme on l'a vu quelques lignes plus haut, y est un majorant de A. Or, d'après la définition de la borne supérieure, $\sup(A)$ est inférieure ou égale à tous les majorants de A. Donc

$$\sup(A) \leq y.$$

On a donc démontré que $\forall y \in B, \sup(A) \leq y$. Donc $\sup(A)$ est bien un minorant de B.
D'après la définition de la borne inférieure, $\inf(B)$ est supérieure ou égal à tous les minorants de B. Puisque $\sup(A)$ est un minorant de B, on a donc :

$$\sup(A) \leq \inf(B).$$

2. Commençons par le sens direct : on suppose que $\sup(A) = \inf(B)$ et on démontre que $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, b - a \leq \epsilon$.

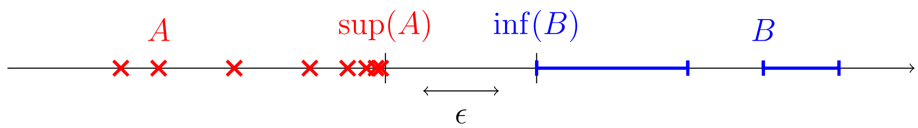


Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Montrons qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $b - a \leq \epsilon$.
Posons $\epsilon' = \epsilon/2 > 0$. D'après le théorème de caractérisation des bornes supérieures, il existe $a \in A$ tel que $a > \sup(A) - \epsilon'$. Fixons un tel a.
D'après le théorème de caractérisation des bornes inférieures, il existe $b \in B$ tel que $b < \inf(B) + \epsilon'$. Fixons un tel b.
Alors

$$\begin{aligned} b - a &\leq (\inf(B) + \epsilon') - (\sup(A) - \epsilon') \\ &= (\inf(B) - \sup(A)) + 2\epsilon' \\ &= 2\epsilon' \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

On a donc bien trouvé $a \in A, b \in B$ tels que $b - a \leq \epsilon$.

Traitons maintenant le sens indirect par contraposée : on suppose que $\sup(A) \neq \inf(B)$ et on montre que la propriété $(\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, b - a \leq \epsilon)$ est fausse. Cela revient à montrer que la négation de cette propriété est vraie, c'est-à-dire que $\exists \epsilon > 0, \forall a \in A, \forall b \in B, b - a > \epsilon$.



On a vu dans la question précédente que $\sup(A) \leq \inf(B)$. Puisque $\sup(A)$ et $\inf(B)$ ne sont pas égaux, on doit avoir $\sup(A) < \inf(B)$. Posons

$$\epsilon = \frac{\inf(B) - \sup(A)}{2} > 0.$$

Montrons que $\forall a \in A, \forall b \in B, b - a > \epsilon$.

Soient $a \in A, b \in B$ quelconques. Puisque $\sup(A)$ est un majorant de A, $a \leq \sup(A)$. De même, puisque $\inf(B)$ est un minorant de B, $\inf(B) \leq b$.

Donc

$$\begin{aligned} b - a &\geq \inf(B) - \sup(A) \\ &= 2\epsilon \\ &> \epsilon. \end{aligned}$$

Puisque ce raisonnement est vrai pour $a \in A$ et $b \in B$ quelconques, on a bien montré que $\forall a \in A, \forall b \in B, b - a > \epsilon$.

Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall a \in A, \forall b \in B, b - a > \epsilon$.

3. Un exemple de parties adjacentes est donné par $A = \mathbb{R}^-$ et $B = \mathbb{R}^+$. En effet, pour tous $a \in \mathbb{R}^-$ et $b \in \mathbb{R}^+$, on a $a \leq 0 \leq b$ donc $a \leq b$. De plus, $\sup(\mathbb{R}^-) = 0 = \inf(\mathbb{R}^+)$.