Chapitre 1, exercice 3

1. **Vrai :** la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que x_1 est rationnel et x_2 est irrationnel. Montrons que $x_1 + x_2$ est un nombre irrationnel.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $x_1 + x_2$ est rationnel. Il existe alors $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x_1 + x_2 = \frac{p}{q}.$$

Puisque, par hypothèse, x_1 est rationnel, il existe $p' \in \mathbb{Z}, q' \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x_1 = \frac{p'}{q'}.$$

On a donc

$$x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 = \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} = \frac{pq' - qp'}{qq'}.$$

Donc x_2 s'écrit comme le quotient de deux entiers, avec l'entier au dénominateur qui est non-nul ($qq' \neq 0$). C'est donc un rationnel. C'est une contradiction avec nos hypothèses (x_2 était supposé irrationnel) ; on a donc obtenu une absurdité. □

2. **Faux :** la somme de deux nombres irrationnels positifs est irrationnelle.

Démonstration. Pour montrer que l'affirmation est fausse, il suffit de trouver deux nombres irrationnels positifs dont la somme est rationnelle.
Posons $x_1 = 10 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{2}$. Ce sont deux nombres irrationnels : x_2 est irrationnel d'après le cours et $x_1 = 10 + (-\sqrt{2})$ est la somme d'un rationnel et d'un irrationnel ; c'est donc un nombre irrationnel d'après la première question.
Ces deux nombres sont également positifs.
Pourtant, $x_1 + x_2 = 10$ donc $x_1 + x_2$ est un nombre rationnel. □

3. **Vrai :** la racine carrée d'un nombre irrationnel positif est irrationnelle.

Démonstration. Soit x_1 un nombre irrationnel positif. Montrons que sa racine carrée est irrationnelle.
On raisonne par l'absurde et on suppose que $\sqrt{x_1} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\sqrt{x_1} = \frac{p}{q}.$$

En élevant au carré, on obtient :

$$x_1 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Donc x_1 s'écrit comme un quotient d'entiers, dont le dénominateur est non-nul. Donc x_1 est rationnel. C'est en contradiction avec nos hypothèses.

□