**Chapitre 1, exercice 9 (B, D, E)**

$B = \{e^n ; n \in \mathbb{N}\}$


- $B$ est minoré.

*Démonstration.* Montrons que 1 est un minorant de $B$. Il faut montrer que $\forall x \in B, x \geq 1$.
Soit $x \in B$ quelconque. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = e^n$.
La fonction exponentielle est croissante donc, comme $n \geq 0$, on a :

$$x = e^n \geq e^0 = 1.$$

□

- $B$ admet un plus petit élément et $\min(B) = 1$.

*Démonstration.* On a déjà vu que 1 était un minorant. De plus, $1 = e^0$ donc $1 \in B$. □

- $B$ admet une borne inférieure et $\inf(B) = 1$.

*Démonstration.* D'après le cours, un ensemble qui admet un plus petit élément admet également une borne inférieure et, dans ce cas, la borne inférieure est égale au plus petit élément. Comme $B$ admet 1 pour plus petit élément, $B$ admet également une borne inférieure et celle-ci est aussi 1. □

- $B$ n'est pas majoré.

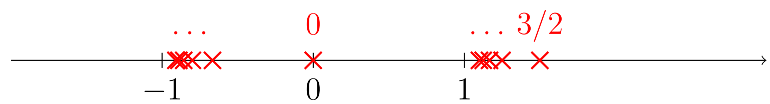
*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons que $B$ est majoré. Soit alors $M \in \mathbb{R}$ un majorant de $B$.
Premier cas : $M \leq 1$.
Posons $x = e^1$. Alors $x \in B$ mais, comme la fonction exponentielle est strictement croissante, $x = e^1 > e^0 = 1 \geq M$. Donc $x > M$. C'est en contradiction avec le fait que $M$ est un majorant de $B$.
Deuxième cas : $M > 1$.
De même que dans le premier cas, on va chercher un élément de $B$ qui soit strictement supérieur à $M$. On va chercher cet élément sous la forme $e^n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$ bien choisi. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'équivalence suivante :

$$(e^n > M) \quad \Longleftrightarrow \quad (n > \ln(M)).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \ln(M)$. Un tel entier existe, d'après la propriété d'Archimède (qu'on peut appliquer car $\ln(M) > 0$, puisque $M > 1$).
Posons $x = e^n$. Alors $x \in B$ mais $x = e^n > M$ (car $n > \ln(M)$). C'est en contradiction avec le fait que $M$ est un majorant de $B$.
Dans chacun des deux cas, on a donc obtenu une contradiction avec notre hypothèse selon laquelle $M$ est un majorant de $B$. C'est absurde. Cela signifie donc que $B$ n'est pas majoré. $\square$

- Puisque $B$ n'est pas majoré, il n'est pas borné et n'admet pas de borne supérieure ni de plus grand élément.

$D = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$




- $D$ est majoré.

  *Démonstration.* Montrons que $\frac{3}{2}$ est un majorant de $D$. Il faut montrer que $\forall x \in D, x \leq \frac{3}{2}$.
  Soit $x \in D$ quelconque. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{1}{n} + (-1)^n$.
  Premier cas : $n$ est pair.
  Dans ce cas, puisque $n$ est un entier pair strictement positif, $n \geq 2$. Donc
  $$x = \frac{1}{n} + (-1)^n = \frac{1}{n} + 1 \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$
  Deuxième cas : $n$ est impair.
  Comme $n$ est un entier strictement positif, $n \geq 1$. Donc
  $$x = \frac{1}{n} + (-1)^n = \frac{1}{n} - 1 \leq \frac{1}{1} - 1 = 0 < \frac{3}{2}.$$
  Ainsi, dans tous les cas, on a $x \leq \frac{3}{2}$. $\square$

- $D$ a un plus grand élément et $\max(D) = \frac{3}{2}$.

  *Démonstration.* On a déjà vu que $\frac{3}{2}$ était un majorant de $D$. De plus, $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + (-1)^2 \in D$. Donc $\frac{3}{2}$ est le plus grand élément de $D$. $\square$

- $D$ a une borne supérieure et $\sup(D) = \frac{3}{2}$.

  *Démonstration.* Un théorème du cours affirme que, lorsqu'un ensemble admet un plus grand élément, il admet aussi une borne supérieure et celle-ci est alors égale au plus grand élément. Comme $D$ a un plus grand élément, qui vaut $\frac{3}{2}$, il a aussi une borne supérieure, qui vaut $\frac{3}{2}$. $\square$

- $D$ est minoré.

  *Démonstration.* Montrons que $-1$ est un minorant de $D$. Il faut montrer que $\forall x \in D, x \geq -1$.
  Soit $x \in D$ quelconque. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{1}{n} + (-1)^n$.
  Comme $(-1)^n$ vaut $-1$ ou 1, on a $(-1)^n \geq -1$. De plus, $\frac{1}{n} > 0$. Donc

  $$x = \frac{1}{n} + (-1)^n \geq 0 + (-1) = -1.$$

  $\square$

- Puisque $D$ est majoré et minoré, il est borné.
- $D$ admet une borne inférieure et $\inf D = -1$.

  *Démonstration.* D'après le théorème de caractérisation de la borne inférieure, il suffit que montrer que $-1$ est un minorant et que $\forall \epsilon > 0, \exists x \in D, x < -1 + \epsilon$.
  On a déjà montré que $-1$ était un minorant.
  Montrons que $\forall \epsilon > 0, \exists x \in D, x < -1 + \epsilon$.
  Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Il faut montrer qu'il existe $x \in D$ tel que $x < -1 + \epsilon$.
  On va chercher $x$ sous la forme $x = \frac{1}{n} + (-1)^n$, pour un certain $n$ impair bien choisi, c'est-à-dire qu'on va chercher $x$ sous la forme $x = \frac{1}{2k+1} + (-1)^{2k+1}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ bien choisi.
  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > \frac{1}{2\epsilon}$ (on sait qu'un tel entier existe d'après la propriété d'Archimède).
  Puisque $k > \frac{1}{2\epsilon}$, on doit avoir

  $$\frac{1}{2k} < \epsilon.$$

  Posons $n = 2k + 1$ et $x = \frac{1}{n} + (-1)^n$. Alors $x$ appartient à $D$ et

  $$\begin{aligned} x &= \frac{1}{n} + (-1)^n \\ &= \frac{1}{2k+1} - 1 \\ &< \frac{1}{2k} - 1 \\ &< \epsilon - 1 \\ &= -1 + \epsilon. \end{aligned}$$

  On a donc bien montré qu'il existait $x \in D$ tel que $x < -1 + \epsilon$. $\square$

- $D$ n'admet pas de plus petit élément.

  *Démonstration.* Comme $D$ est une partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$, on sait, d'après le cours, que $D$ admet un plus petit élément si et seulement si $\inf(D) \in D$. Pour montrer qu'il n'y a pas de plus petit élément, il suffit donc de montrer que $\inf(D) \notin D$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $-1 = \inf(D)$ appartient à $D$. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $-1 = \frac{1}{n} + (-1)^n$.
Puisque $(-1)^n \geq -1$,

$$\frac{1}{n} = -1 - (-1)^n \leq -1 - (-1) = 0.$$

Donc $n \leq 0$. C'est absurde puisque $n$ appartient à $\mathbb{N}^*$. $\square$

$E = \{x \in \mathbb{R}; -2 < x + (2x)^{-1} \leq 2\}$
Avant de dessiner et d'analyser $E$, déterminons-en une expression plus explicite.
Les éléments de $E$ sont les réels $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient la double inégalité $-2 < x + (2x)^{-1} \leq 2$. Déterminons donc quels sont ces réels. Comme l'inégalité n'a pas de sens pour $x = 0$, on se limite aux réels $x \in \mathbb{R}^*$.
Commençons par l'inégalité de gauche. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ quelconque.

$$\begin{aligned}\left(-2 < x + (2x)^{-1}\right) &\iff \left(0 < x + 2 + \frac{1}{2x}\right) \\ &\iff \left(0 < \frac{x^2 + 2x + 1/2}{x}\right)\end{aligned}$$

Définissons la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \to \frac{x^2+2x+1/2}{x}$ et étudions le signe de $f$.
On calcule les racines du polynôme $x \to x^2 + 2x + 1/2$ : il y en a deux ; ce sont $-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque le coefficient dominant du polynôme est strictement positif, le polynôme est négatif entre ses deux racines et positif ailleurs. On a donc le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $x^2 + 2x + 1/2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

On en déduit donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\left(-2 < x + (2x)^{-1}\right) \iff \left(\left(x \in \left]-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\right) \text{ ou } (x \in \mathbb{R}_+^*)\right)$$

On fait le même raisonnement pour l'inégalité de droite et on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\left(x + (2x)^{-1} \leq 2\right) \iff \left((x \in \mathbb{R}_-^*) \text{ ou } \left(x \in \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)\right)$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la propriété $(-2 < x + (2x)^{-1} \leq 2)$ est vraie si et seulement si l'une des quatre propriétés suivantes est vraie :

(1) $\left(x \in \left]-1-\frac{1}{\sqrt{2}};-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right[ \text{ et } x \in \mathbb{R}_-^*\right) \iff \left(x \in \left]-1-\frac{1}{\sqrt{2}};-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\right)$ ;

(2) $\left(x \in \left]-1-\frac{1}{\sqrt{2}};-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right[ \text{ et } x \in \left[1-\frac{1}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)$, ce qui est impossible ;

(3) $\left(x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } x \in \mathbb{R}_-^*\right)$, ce qui est impossible ;

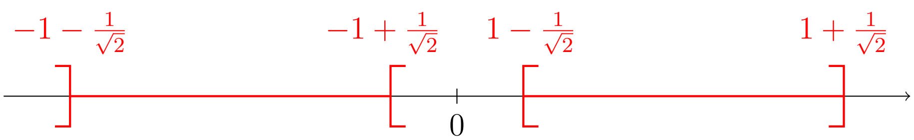
(4) $\left(x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } x \in \left[1-\frac{1}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) \iff \left(x \in \left[1-\frac{1}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)$.

En d'autres termes, la propriété est vraie si et seulement si

$$x \in \left]-1-\frac{1}{\sqrt{2}};-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right[ \cup \left[1-\frac{1}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Puisque $E$ est l'ensemble des réels $x$ qui vérifient la propriété $(-2 < x+(2x)^{-1} \leq 2)$, on a

$$E = \left]-1-\frac{1}{\sqrt{2}};-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right[ \cup \left[1-\frac{1}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$




- $E$ est minoré.

  *Démonstration.* Montrons que $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ est un minorant de $E$. Il faut montrer que, pour tout $x \in E$, $x \geq -1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
  Soit $x \in E$ quelconque.
  Premier cas : $x \in \left]-1-\frac{1}{\sqrt{2}};-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$
  Dans ce cas, $-1-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < -1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $x \geq -1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
  Deuxième cas : $x \in \left[1-\frac{1}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$
  Dans ce cas, $x \geq 1-\frac{1}{\sqrt{2}} > -1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. □

- $E$ admet une borne inférieure et $\inf(E) = -1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

  *Démonstration.* On a vu que $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ était un minorant. Il suffit donc, d'après le théorème de caractérisation de la borne inférieure, de montrer que $\forall \epsilon > 0, \exists x \in E, x < -1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\epsilon$.
  Soit $\epsilon > 0$. Montrons que $\exists x \in E, x < -1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\epsilon$.
  Premier cas : $\epsilon > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
  Dans ce cas, posons $x=-1$. Alors $x \in \left]-1-\frac{1}{\sqrt{2}};-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ donc $x \in E$. De plus,

  $$x = -1 = -1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} < -1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\epsilon.$$

  Deuxième cas : $\epsilon \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Posons $x = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\epsilon}{2}$. On a

$$-1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\epsilon}{2} \leq -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} < -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc $x \in \left]-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ donc $x \in E$.
De plus, $x < -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon$ car $\frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Dans les deux cas, on a bien réussi à trouver $x \in E$ tel que $x < -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon$. □

- $E$ n'admet pas de plus petit élément.

  *Démonstration.* $E$ admet une borne inférieure mais cette borne inférieure, $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, n'appartient pas à $E$. □

- $E$ est majoré.

  *Démonstration.* $E$ est majoré par $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. La démonstration est identique à celle du fait que $E$ est minoré. □

- Comme $E$ est majoré et minoré, $E$ est borné.
- $E$ admet un plus grand élément et $\max(E) = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

  *Démonstration.* On a vu que $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ était un majorant. De plus, c'est un élément de $E$. □

- $E$ admet une borne supérieure et $\sup(E) = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

  *Démonstration.* On a vu que $E$ admettait un plus grand élément. Il admet donc également une borne supérieure et celle-ci est égale au plus grand élément, c'est-à-dire à $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. □

**Chapitre 1, exercice 18**

Dans cet exercice, on utilisera à plusieurs reprises la propriété suivante : $\forall a, b \in \mathbb{Z}, (a < b) \Rightarrow (a \leq b - 1)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrons que $E(x + 1) = E(x) + 1$.
D'après la définition de la partie entière, $E(x) \leq x < E(x) + 1$. On a donc également

$$E(x) + 1 \leq x + 1 < E(x) + 2.$$

Posons $n = E(x) + 1$. D'après la double inégalité précédente, $n$ vérifie la propriété suivante :

$$n \leq x + 1 < n + 1.$$

D'après la définition de la partie entière, on a donc $E(x+1) = n$. Et comme $n = E(x) + 1$, on a $E(x+1) = E(x) + 1$.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ quelconques. Montrons que $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
D'après la définition de la partie entière :

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x+y) + 1.$$

Puisque $E(x) + E(y)$ et $E(x+y)$ sont des entiers, l'inégalité $E(x) + E(y) < E(x+y) + 1$ implique $E(x) + E(y) \leq E(x+y)$ (d'après la propriété rappelée au début de l'exercice).
D'autre part,

$$E(x+y) \leq x + y < (E(x) + 1) + (E(y) + 1) = E(x) + E(y) + 2.$$

Puisque $E(x+y)$ et $E(x) + E(y)$ sont des entiers, l'inégalité $E(x+y) < E(x) + E(y) + 2$ implique $E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$ (à nouveau d'après la propriété rappelée au début de l'exercice).
On a donc bien démontré $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.