Chapitre 2, exercice 28

1. **Vrai :** si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Démonstration. Soit u une suite réelle telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$ un majorant de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq M.$$

D'après une propriété du cours (page 48 du poly), la suite u est donc bornée. □

2. **Faux :** si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites divergentes, la suite somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi divergente.

Démonstration. Donnons un contre-exemple.
Soit u une suite divergente quelconque (on peut par exemple définir u par $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n)$).
Soit $v = -u$. La suite v est divergente. En effet, si elle était convergente, alors $u = -v$ serait également convergente (d'après les propriétés des opérations algébriques sur des suites convergentes), ce qui serait contraire à la définition de u.
Les suites u et v sont donc toutes deux divergentes. En revanche, $u + v$ est la suite constante de valeur zéro. Elle est donc convergente, comme toute suite constante, et non divergente. □

5. **Faux :** la convergence d'au moins une suite extraite implique la convergence de la suite elle-même.

Démonstration. On a vu un contre-exemple en cours. En effet, considérons la suite u définie par $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n)$.
La suite u admet une suite extraite qui converge. En effet, la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1 ; elle converge donc vers 1.
Néanmoins, on a vu en cours que u était divergente. □

7. **Faux :** toute suite positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang.

Démonstration. Donnons un contre-exemple. Définissons la suite u de la manière suivante :

$$\begin{array}{llcll} \forall n \in \mathbb{N}, & u_n & = & \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ & u_n & = & 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{array}$$

La suite u est positive.
Montrons que u tend vers 0. Définissons la suite v telle que $(\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n+1})$. Définissons la suite w qui est constante égale à zéro. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} = v_n.$$

De plus, w et v convergent vers zéro. D'après le théorème d'encadrement, la suite u converge également vers zéro.
Néanmoins, la suite u n'est pas décroissante à partir d'un certain rang. Démontrons-le par l'absurde : on suppose qu'il existe un rang à partir duquel u est décroissante. Notons $N \in \mathbb{N}$ un tel rang.
Si N est pair, posons $N' = N$. Si N est impair, posons $N' = N + 1$. Cela définit dans le deux cas un entier N' pair tel que $N' \geq N$.
Puisque u est décroissante à partir du rang N et puisque $N' \geq N$, on doit avoir

$$u_{N'+1} \leq u_{N'}.$$

Or N' est pair et $N' + 1$ est impair ; on en déduit donc

$$\frac{1}{N'+2} \leq 0,$$

et donc $1 \leq 0$ (puisque $N' + 2 > 0$), ce qui est absurde. $\square$

8. **Vrai :** toute suite qui converge vers une limite $\ell > 0$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

Démonstration. Soit u une suite convergente. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. On suppose que ℓ est strictement positive. Montrons que u est strictement positive à partir d'un certain rang.
Puisque u converge vers ℓ, on sait que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Appliquons cette propriété pour $\epsilon = \ell > 0$: soit $N \in \mathbb{N}$ un entier tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \ell$.
Pour tout $n \geq N$, puisque $|u_n - \ell| < \ell$, on doit avoir que u_n appartient à $]\ell - \ell; \ell + \ell[=]0; 2\ell[$.
En particulier, pour tout $n \geq N$, $u_n > 0$. $\square$

Exercice 30 : théorème de Cesàro

1. (a) On commence par remarquer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \geq N$, en vertu de

l'inégalité triangulaire (appliquée deux fois, à la troisième et à la cinquième ligne de ce qui suit),

$$\begin{aligned}
|v_n| &= \left|\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}\right| \\
&= \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k}{n}\right| \\
&\leq \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} u_k}{n}\right| + \left|\frac{\sum_{k=N+1}^{n} u_k}{n}\right| \\
&= \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} u_k}{n}\right| + \frac{\left|\sum_{k=N+1}^{n} u_k\right|}{n} \\
&\leq \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} u_k}{n}\right| + \frac{\sum_{k=N+1}^{n} |u_k|}{n}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

La suite u converge vers 0 :

$$\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, |u_k| < \delta.$$

On applique cette propriété pour $\delta = \epsilon/2$. Soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq N$, $|u_k| < \epsilon/2$. Alors, pour tout $n \geq N$, d'après l'inégalité (1) et le fait que pour tout $k \in \{N+1, \ldots, n\}$, $|u_k| < \epsilon/2$,

$$\begin{aligned}
|v_n| &\leq \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} u_k}{n}\right| + \frac{\sum_{k=N+1}^{n} |u_k|}{n} \\
&< \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} u_k}{n}\right| + \frac{\sum_{k=N+1}^{n} \frac{\epsilon}{2}}{n} \\
&= \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} u_k}{n}\right| + \frac{\epsilon}{2}\frac{n-N}{n} \\
&\leq \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} u_k}{n}\right| + \frac{\epsilon}{2}\frac{n}{n} \\
&= \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} u_k}{n}\right| + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

1. (b) Posons $N' = E\left(\frac{2}{\epsilon}\left|\sum_{k=1}^{N} u_k\right|\right) + 1$. (Cette définition est bien valide puisque ϵ et N sont des éléments de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ fixés ; pour cette question, ce sont donc des « constantes ».)
Avec cette définition, N' est bien un entier (positif). Pour tout $n \geq N'$,

$$\begin{aligned}
& n \geq N' > \frac{2}{\epsilon}\left|\sum_{k=1}^{N} u_k\right| \\
\Rightarrow \quad & \frac{\left|\sum_{k=1}^{N} u_k\right|}{n} < \frac{\epsilon}{2} \\
\Rightarrow \quad & \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} u_k}{n}\right| < \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

1. (c) On veut démontrer la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N'' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N'', |v_n| < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Soit N un entier vérifiant la propriété de la question (a). Soit N' un entier vérifiant la propriété de la question (b).
Notons $N'' = \max(N, N')$. Montrons que, pour tout $n \geq N''$, $|v_n| < \epsilon$.
Soit $n \geq N''$ quelconque. Comme $n \geq N$, d'après la propriété de la question (a), on a :

$$|v_n| < \left| \frac{\sum_{k=1}^{N} u_k}{n} \right| + \frac{\epsilon}{2}.$$

De plus, comme $n \geq N'$, on peut combiner cette inégalité avec la propriété de la question (b) :

$$|v_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ainsi, on a montré que, pour tout $n \geq N''$, $|v_n| < \epsilon$.
Il existe donc bien N'' tel que, pour tout $n \geq N''$, $|v_n| < \epsilon$.

2. Définissons la suite $\tilde{u} = u - \ell$. Cette suite converge vers zéro.
Définissons maintenant la suite des moyennes associée à $\tilde{u}$, qu'on note $\tilde{v}$: on pose $\tilde{v}_0 = \tilde{u}_0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\tilde{v}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_k}{n}.$$

D'après la question 1.(c), la suite $\tilde{v}$ converge vers zéro.
Établissons maintenant une formule qui relie les suites $\tilde{v}$ et v. Pour $n = 0$, $\tilde{v}_n = \tilde{u}_0 = u_0 - \ell = v_n - \ell$.
Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_n &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_k}{n} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell)}{n} \\
&= \frac{(\sum_{k=1}^{n} u_k) - n\ell}{n} \\
&= v_n - \ell.
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{v}_n = v_n - \ell$.
Ainsi, $v = \tilde{v} + \ell$ et, puisque $\tilde{v}$ converge vers zéro, v converge également et sa limite vaut ℓ.