Chapitre 2, exercice 6

1. On va montrer les implications suivantes :

$$(a) \Rightarrow (b), \quad (b) \Rightarrow (c), \quad (c) \Rightarrow (d), \quad (d) \Rightarrow (a).$$

Cela suffit pour assurer que les propriétés (a), (b), (c), (d) sont soit toutes vraies à la fois, soit toutes fausses à la fois. Cela assure donc qu'elles sont équivalentes.

Montrons $(a) \Rightarrow (b)$.
On suppose que (a) est vraie : U est dense dans $\mathbb{R}$. D'après la définition de la densité, la propriété suivante est donc vraie :

$$\text{pour tous les réels } a, b \text{ tels que } a < b, \text{ l'ensemble } U \cap]a; b[\text{ est non-vide.} \tag{1}$$

Démontrons que (b) est vraie. Soient x un réel quelconque et ϵ un réel strictement positif quelconque. Il faut montrer que $U \cap]x - \epsilon; x + \epsilon[$ est non-vide.
On applique la propriété 1, pour les réels $a = x - \epsilon$ et $b = x + \epsilon$: elle dit directement que l'ensemble $U \cap]a; b[= U \cap]x - \epsilon; x + \epsilon[$ est non-vide.

Montrons $(b) \Rightarrow (c)$.
On suppose que (b) est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, U \cap]x - \epsilon; x + \epsilon[\neq \emptyset. \tag{b}$$

Démontrons que (c) est vraie. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ quelconques. On applique la propriété (b) à x et à $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$. La propriété dit alors que $U \cap \left]x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}\right[$ est non-vide.

Montrons $(c) \Rightarrow (d)$.
On suppose que (c) est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, U \cap \left]x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}\right[\neq \emptyset. \tag{c}$$

Démontrons que (d) est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Construisons une suite u dont tous les termes appartiennent à U et qui converge vers x.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n un élément de $U \cap \left]x - \frac{1}{n+1}; x + \frac{1}{n+1}\right[$. Cette définition est valide puisque, d'après la propriété (c), un tel élément existe.
On obtient ainsi une suite u dont tous les termes appartiennent à U. Montrons qu'elle converge vers x, c'est-à-dire montrons que $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - x| < \epsilon$.
Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq N, |u_n - x| < \epsilon$.
On remarque que, pour tout n, $u_n \in \left]x - \frac{1}{n+1}; x + \frac{1}{n+1}\right[$, c'est-à-dire que $|u_n - x| < \frac{1}{n+1}$.
Posons $N = E(\frac{1}{\epsilon})$. Pour tout $n \geq N$, d'après la remarque qu'on vient de faire,

$$|u_n - x| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} = \frac{1}{E(1/\epsilon) + 1} < \epsilon.$$

Montrons $(d) \Rightarrow (c)$.
On suppose que (d) est vraie :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ il existe une suite } u \text{ dont tous les termes appartiennent à } U \text{ et qui converge vers } x. \tag{d}$$

Démontrons que (a) est vraie. Il faut montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, l'ensemble $U \cap]a; b[$ est non-vide.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des réels quelconques tels que $a < b$. Montrons que $U \cap]a; b[$ est non-vide.
Soit $x = \frac{a+b}{2}$ (remarque : n'importe quel réel de l'intervalle $]a; b[$ aurait convenu ; il aurait simplement fallu modifier un peu la suite de la démonstration). D'après la propriété (d), il existe une suite u dont tous les termes appartiennent à U et qui converge vers x. Soit u une telle suite.
Puisque u converge vers $\frac{a+b}{2}$, tous les termes de u appartiennent à $]a; b[$ à partir d'un certain rang : en effet, si on applique la définition de la convergence avec $\epsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, on obtient qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$, c'est-à-dire $u_n \in]a; b[$. Soit un tel $N \in \mathbb{N}$.
D'après la définition de N, $u_N \in]a; b[$. De plus, d'après la définition de u, tous les termes de u appartiennent à U. Donc $u_N \in U \cap]a; b[$. Donc $U \cap]a; b[$ est non-vide.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrons qu'il existe une suite u croissante, dont tous les termes sont rationnels et qui tend vers x.
On définit u par récurrence :

- Soit $u_0 \in \mathbb{Q} \cap]x - 1; x[$ quelconque. (On sait qu'un tel réel existe : $\mathbb{Q} \cap]x - 1; x[$ est non-vide puisque $\mathbb{Q}$ est dense.)
- Pour tout n, si on a défini $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, on définit u_n de la manière suivante :
  - si $u_{n-1} > x - \frac{1}{n+1}$, on pose $u_n = u_{n-1}$;
  - si $u_{n-1} \leq x - \frac{1}{n+1}$, on pose u_n un élément quelconque de $\mathbb{Q} \cap \left]x - \frac{1}{n+1}; x\right[$ (l'intersection est non-vide, puisque $\mathbb{Q}$ est dense, donc la définition est valide).

D'après la définition, tous les termes de u sont rationnels. Montrons que u vérifie les trois propriétés suivantes :

(1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x - \frac{1}{n+1} < u_n < x$;

(2) la suite u est croissante ;

(3) la suite u converge vers x.

Les propriétés (2) et (3) sont celles qu'il nous faut démontrer pour résoudre la question. La propriété (1) nous sera utile pour démontrer (2) et (3).

Montrons la propriété (1) par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, la propriété est vraie : $x - 1 < u_0 < x$.
Soit maintenant $n > 0$. Supposons que la propriété est vraie pour $n - 1$: $x - \frac{1}{n} < u_{n-1} < x$.
Montrons que la propriété est vraie pour n, c'est-à-dire montrons $x - \frac{1}{n+1} < u_n < x$.

Si $u_{n-1} > x - \frac{1}{n+1}$, on a $u_n = u_{n-1}$. Ainsi, $u_n = u_{n-1} > x - \frac{1}{n+1}$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n = u_{n-1} < x$. Donc $x - \frac{1}{n+1} < u_n < x$.
D'un autre côté, si $u_{n-1} \leq x - \frac{1}{n+1}$, on sait, d'après la définition de u, que u_n appartient à $\left]x - \frac{1}{n+1}; x\right[$. Donc $x - \frac{1}{n+1} < u_n < x$.

Montrons la propriété (2).
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Montrons que $u_n \leq u_{n+1}$.
Si $u_n > x - \frac{1}{n+2}$, alors $u_{n+1} = u_n$ donc $u_n \leq u_{n+1}$.
Si, au contraire, $u_n \leq x - \frac{1}{n+2}$, alors, d'après la définition de u, u_{n+1} appartient à $\left]x - \frac{1}{n+2}; x\right[$. Donc $u_{n+1} > x - \frac{1}{n+2} \geq u_n$. Ainsi, $u_n \leq u_{n+1}$.

Montrons la propriété (3).
Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq N, |u_n - x| < \epsilon$.
Soit $N = E(1/\epsilon)$. Pour tout $n \geq N$,

$$n + 1 \geq E(1/\epsilon) + 1 > \frac{1}{\epsilon}.$$

D'après la propriété (1), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - x \in \left]-\frac{1}{n+1}; 0\right[$ donc $|u_n - x| < \frac{1}{n+1}$. Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - x| < \frac{1}{n+1} < \epsilon.$$