Énoncé : soit

$$\begin{array}{rcccl} f & : &]0;1[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & 1 \quad \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ & & & & 0 \quad \text{sinon.} \end{array}$$

La fonction f admet-elle une limite en 0 ? Si oui, laquelle ?

Solution

La fonction f n'admet pas de limite en 0. Démontrons-le de deux manières différentes.

<u>Première méthode : avec la définition de la convergence</u>

Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction f converge en 0. Notons ℓ sa limite.
Soit $\epsilon = 1/2$. Puisque $f \overset{0}{\to} \ell$, on sait (d'après la définition de la convergence) qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall u \in]0;1[\cap]-\delta;\delta[, |f(u) - \ell| < \epsilon,$$

c'est-à-dire tel que

$$\forall u \in]0;\min(1,\delta)[, |f(u) - \ell| < \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Soit $\delta > 0$ un tel réel.
Puisque $\mathbb{Q}$ est dense, l'ensemble $\mathbb{Q} \cap]0;\min(1,\delta)[$ est non-vide. Soit $a \in \mathbb{Q} \cap]0;\min(1,\delta)[$.
De même, puisque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense, l'ensemble $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap]0;\min(1,\delta)[$ est non-vide. Soit $b \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap]0;\min(1,\delta)[$.
Puisque a et b appartiennent à $]0;\min(1,\delta)[$, la propriété (1) (appliquée à $u = a$ puis à $u = b$) implique :

$$|f(a) - \ell| < \frac{1}{2} \text{ et } |f(b) - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Or $f(a) = 1$, puisque $a \in \mathbb{Q}$, et $f(b) = 0$, puisque $b \notin \mathbb{Q}$. Donc

$$|1 - \ell| < \frac{1}{2} \text{ et } |\ell| < \frac{1}{2}.$$

On en déduit par inégalité triangulaire que

$$1 \leq |1 - \ell| + |\ell| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ce qui est absurde.

<u>Deuxième méthode : par le théorème de caractérisation séquentielle</u>

(Principe similaire à l'exemple 1 du paragraphe 3.3.2 du poly.)
Soient u et v les suites d'éléments définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} \text{ et } v_n = \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Pour tout $n \geq 2$, $u_n \in]0;1[$ et $v_n \in]0;1[$. De plus, les suites u et v convergent vers 0.
Pour tout $n \geq 2$, $f(u_n) = 1$, puisque $u_n \in \mathbb{Q}$, et $f(v_n) = 0$, puisque $v_n \notin \mathbb{Q}$. Donc $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

On a donc trouvé deux suites d'éléments de $]0;1[$ (à partir du rang 2) convergeant vers zéro dont les images par f ne convergent pas vers la même limite. Or, d'après le théorème de caractérisation séquentielle, si f admettait une limite en zéro, les deux suites images devraient converger vers la même limite. C'est donc que f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 5

1. On veut montrer la propriété suivante :

$$\forall A > 0, \exists M > 0, \forall x \in [M; +\infty[, a^x > A.$$

Soit $A > 0$ quelconque. Montrons l'existence de $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [M; +\infty[$, $a^x > A$. On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(a^x > A) &\iff (e^{x\ln(a)} > A) \\ &\iff (x\ln(a) > \ln(A)) \\ &\iff \left(x > \frac{\ln(A)}{\ln(a)}\right).\end{aligned}$$

Pour la dernière équivalence, on a utilisé le fait que $\ln(a) > 0$ (qui provient de l'hypothèse selon laquelle $a > 1$).
Il faut donc montrer qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [M; +\infty[$, $x > \frac{\ln(A)}{\ln(a)}$. Cela revient à montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $M > \frac{\ln(A)}{\ln(a)}$.
Posons $M = \left|\frac{\ln(A)}{\ln(a)}\right| + 1$. On a bien $M \geq 1 > 0$ (car une valeur absolue est toujours supérieure ou égale à zéro) et

$$M \geq \frac{\ln(A)}{\ln(a)} + 1 > \frac{\ln(A)}{\ln(a)}.$$

2. On sait que la fonction $x \to \frac{f(x)}{x}$ tend vers $\ell > 0$ en $+\infty$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \tilde{M} > 0, \forall u \in [\tilde{M}; +\infty[, \left|\frac{f(u)}{u} - \ell\right| < \epsilon. \qquad (2)$$

On veut montrer que la fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\forall A > 0, \exists M > 0, \forall u \in [M; +\infty[, f(u) > A.$$

Soit $A > 0$ quelconque. Montrons l'existence de $M > 0$ tel que, pour tout $u \in [M; +\infty[$, $f(u) > A$.
(Conseil de méthode : la seule hypothèse qu'on ait sur f est la propriété (2). Il va donc falloir l'utiliser. Pour cela, le plus simple est de fixer un $\epsilon > 0$ et, en utilisant la propriété, de définir un $\tilde{M}$ correspondant. A priori, à ce stade du raisonnement, on ne sait pas comment choisir ϵ de manière judicieuse ; le plus simple est sans doute de choisir $\epsilon > 0$ quelconque dans un

premier temps puis de revenir « corriger » cette définition une fois qu'on aura progressé dans la démonstration et qu'on aura compris quelle définition aurait été pertinente.)

Fixons $\epsilon \in]0;\ell[$ quelconque. *(Remarque : ceci est la version « corrigée » dont il était question à l'instant. En effet, la suite de la démonstration va montrer que n'importe quelle valeur de $\epsilon > 0$ permet de conclure, à condition que $\ell - \epsilon$ soit positif, c'est-à-dire que ϵ appartienne à $]0;\ell[$.)*

Soit $\tilde{M} > 0$ tel que

$$\forall u \in [\tilde{M};+\infty[, \left|\frac{f(u)}{u} - \ell\right| < \epsilon. \tag{3}$$

L'existence d'un tel $\tilde{M}$ est garantie par la propriété (2).

Soit, dans un premier temps, $M > 0$ quelconque. Fixons $u \in [M;+\infty[$ quelconque et essayons de trouver une inégalité de la forme

$$f(u) > \text{quelque chose.}$$

On remarque que, si $M \geq \tilde{M}$, alors, puisque $u \geq M$, on a aussi $u \geq \tilde{M}$. D'après la propriété (3), cela entraîne :

$$\left|\frac{f(u)}{u} - \ell\right| < \epsilon$$

et donc

$$\frac{f(u)}{u} > \ell - \epsilon.$$

Comme u est strictement positif (puisque $u \geq M > 0$) et $\ell - \epsilon > 0$, on en déduit

$$f(u) > (\ell - \epsilon)u \geq (\ell - \epsilon)M.$$

Puisque u était un élément <u>quelconque</u> de $[M;+\infty[$, l'inégalité obtenue est valable pour tous les éléments de $[M;+\infty[$. On a donc montré que, pour tout $M > 0$, si $M \geq \tilde{M}$, alors

$$\forall u \in [M;+\infty[, f(u) > M(\ell - \epsilon). \tag{4}$$

Posons maintenant $M = \max\left(\tilde{M}, \frac{A}{\ell-\epsilon}\right) > 0$. Alors, d'après la propriété (4) (qu'on peut appliquer car $M \geq \tilde{M}$), on a :

$$\forall u \in [M;+\infty[, f(u) > M(\ell - \epsilon) \geq A.$$

On a donc bien montré qu'il existait $M > 0$ tel que, pour tout $u \in [M;+\infty[$, $f(u) > A$.