Exercice 7

Notons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = E(x) + E(-x)$. Elle n'a pas de limite en $+\infty$. Démontrons-le.
On commence par remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $E(x) = x$ et $E(-x) = -x$ (puisque la partie entière d'un entier est toujours l'entier lui-même), donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + (-x) = 0.$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ quelconque. Posons $n = E(x)$. D'après la définition de la partie entière, $n \leq x < n + 1$ et, comme x n'est pas entier, $x \neq n$, c'est-à-dire

$$n < x < n + 1.$$

En multipliant par -1, on obtient :

$$-n - 1 < -x < -n,$$

donc en particulier, $-n - 1 \leq -x < (-n - 1) + 1$, ce qui entraîne, d'après la définition de la partie entière, que $E(-x) = -n - 1$. Donc

$$f(x) = n + (-n - 1) = -1.$$

Définissons maintenant u et v par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n \text{ et } v_n = n + 1/2.$$

Les suites u et v sont deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ qui tendent vers $+\infty$. Si la fonction f admettait une limite en $+\infty$, les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeraient donc toutes les deux vers cette limite, d'après le théorème de caractérisation séquentielle.
Or, d'après le raisonnement précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$ (car u_n est un entier) et $f(v_n) = -1$ (car v_n n'est pas un entier). Les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc vers des limites différentes (0 et -1). Ainsi, f ne peut pas avoir de limite en $+\infty$.

Exercice 11

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, d'après la définition de la partie entière,

$$\frac{b}{x} - 1 < E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{x}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc (en multipliant par $\frac{x}{a}$ la double inégalité précédente et en remplaçant l'inégalité stricte par une inégalité large) :

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} \leq \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{a}.$$

Les fonctions $x \in \mathbb{R}_+^* \to \frac{b}{a} - \frac{x}{a}$ et $x \in \mathbb{R}_+^* \to \frac{b}{a}$ ont des limites à droite en 0^+ :

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} \xrightarrow{x \to 0^+} \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} \xrightarrow{x \to 0^+} \frac{b}{a}.$$

Ces deux limites sont identiques. On peut donc appliquer le théorème d'encadrement et on en déduit :

$$\frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) \xrightarrow{x \to 0^+} \frac{b}{a}.$$

Calculons maintenant la limite, si elle existe, de la deuxième expression.
On remarque que, pour tout $x \in]0; a[$, $0 < \frac{x}{a} < 1$ donc $E\left(\frac{x}{a}\right) = 0$ et $\frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in]0; a[$,

$$0 \leq \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) \leq 0,$$

ce qui implique par encadrement que :

$$\frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) \xrightarrow{x \to 0^+} 0.$$

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée. Montrons qu'elle admet une limite finie en $+\infty$.
Considérons la suite $u = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \geq f(n)$ puisque f est croissante. De plus, cette suite est majorée : en effet, par hypothèse, f admet un majorant et un majorant de f est aussi un majorant de u.
D'après le chapitre 2 du cours, toute suite croissante et majorée est convergente. La suite u est donc convergente. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ la limite. Toujours d'après le chapitre 2, on sait que (comme $\ell = \sup u$)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell. \tag{1}$$

Dans la suite, on va montrer que f tend vers ℓ en $+\infty$. On commence par un lemme qui nous simplifiera la tâche.

Lemme. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \leq \ell$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ quelconque. Posons $n = E(x) + 1 \geq 0$. Puisque f est croissante et puisque $x < E(x) + 1 = n$,

$$f(x) \leq f(n) = u_n.$$

D'après la propriété (1), $u_n \leq \ell$. Donc $f(x) \leq \ell$. □

Montrons maintenant la convergence de f vers ℓ, c'est-à-dire montrons la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in [M; +\infty[, |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Montrons l'existence de $M > 0$ tel que

$$\forall x \in [M; +\infty[, |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Puisque la suite u converge vers ℓ, on sait que la propriété suivante est vraie :

$$\forall \tilde{\epsilon} > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \tilde{\epsilon}.$$

Appliquons cette propriété avec $\tilde{\epsilon} = \epsilon$. On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \epsilon$. Soit un tel N fixé.
Posons $M = N + 1 > 0$. Pour tout $x \geq M$, on a aussi $x \geq N$ donc, puisque f est croissante,

$$f(x) \geq f(N) = u_N.$$

Or, d'après la définition de N, puisque $N \geq N$, $|u_N - \ell| < \epsilon$, donc

$$u_N > \ell - \epsilon.$$

En combinant les deux dernières équations, on obtient que, pour tout $x \geq M$,

$$f(x) > \ell - \epsilon.$$

Si l'on utilise également le lemme, on peut affirmer que, pour tout $x \geq M$,

$$\ell - \epsilon < f(x) \leq \ell < \ell + \epsilon.$$

Donc, pour tout $x \in [M; +\infty[$,

$$|f(x) - \ell| < \epsilon.$$

On a bien montré qu'il existait $M > 0$ tel que

$$\forall x \in [M; +\infty[, |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Exercice 18

1. On sait que
$$\frac{1}{x} \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{et} \qquad \exp(x) \overset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Par le théorème de composition des limites,
$$\exp\left(\frac{1}{x}\right) \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$
Par produit,
$$\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right) \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$
En composant à nouveau avec la fonction exponentielle, on en déduit
$$\exp\left(\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right) \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$
De la même manière,
$$x\exp(x) \overset{x\to -\infty}{\longrightarrow} 0,$$
d'après le théorème des croissances comparées. De plus
$$\frac{1}{x} \overset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty.$$
Si on pose $f : x \in \mathbb{R} \to x\exp(x) \in \mathbb{R}$ et $g : x \in \mathbb{R}^* \to \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$, le théorème de composition des limites nous dit que $f \circ g$ tend vers 0 en 0^- :
$$\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right) \overset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0.$$
Puisque exp tend vers 1 en 0, une nouvelle application du théorème de composition nous donne :
$$\exp\left(\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right) \overset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 1.$$
Ainsi, la fonction $x \in \mathbb{R}^* \to \exp\left(\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ a des limites à gauche et à droite en 0 (1 et $+\infty$) mais ces limites sont différentes. La fonction n'a donc pas de limite (même infinie) en 0.

2. Pour tout $x \in]0;1[$, $E(x) = 0$ et $0 < \frac{1}{1+x} < 1$ donc $E\left(\frac{1}{1+x}\right) = 0$ et $E(x) + E\left(\frac{1}{1+x}\right) = 0$. Ainsi, de même que dans l'exercice 11,
$$E(x) + E\left(\frac{1}{1+x}\right) \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$
Or $E(0) + E\left(\frac{1}{1+0}\right) = 0 + 1 = 1$.

Un théorème du cours nous dit que la fonction $x \to E(x) + E\left(\frac{1}{1+x}\right)$ admet une limite en zéro si et seulement si elle admet des limites à droite et à gauche, qui sont égales à la valeur de la fonction en zéro.
On vient de voir que la fonction admettait bien une limite à droite en zéro mais que cette valeur, 0, n'était pas égale à la valeur de la fonction en zéro, 1. C'est donc que la fonction $x \to E(x) + E\left(\frac{1}{1+x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

3. La fonction $\sin \circ \cos$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
Soient u et v les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\pi n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$. Ce sont deux suites de nombres réels qui tendent vers $+\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin(\cos(u_n)) = \sin(\cos(2\pi n)) = \sin(1),$$

donc la suite $(\sin(\cos(u_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, de valeur $\sin(1)$; elle converge vers $\sin(1)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin(\cos(v_n)) = \sin\left(\cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(0) = 0.$$

Donc $(\sin(\cos(v_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Ainsi, on a trouvé deux suites de réels tendant vers $+\infty$ dont les images par $\sin \circ \cos$ convergent vers des limites différentes ($\sin(1) \neq 0$). D'après le théorème de caractérisation séquentielle, la fonction $\sin \circ \cos$ n'admet donc pas de limite en $+\infty$.

4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2\pi n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 2\pi n + \frac{3\pi}{2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E\left(\frac{\sin(u_n)}{u_n}\right) = E\left(\frac{\sin(2\pi n)}{2\pi n}\right) = E(0) = 0.$$

La suite $\left(E\left(\frac{\sin(u_n)}{u_n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers 0.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\sin(v_n)}{v_n} = \frac{-1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\pi n + \frac{3\pi}{2} > 2\pi n \geq 2\pi > 1$ donc $0 < \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}} < 1$ et

$$-1 < \frac{\sin(v_n)}{v_n} < 0,$$

ce dont on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, E\left(\frac{\sin(v_n)}{v_n}\right) = -1.$$

Ainsi, la suite $\left(E\left(\frac{\sin(v_n)}{v_n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers -1.
On a donc trouvé deux suites de réels, u et v, qui tendent vers $+\infty$ mais dont les images par $x \to E\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ ne convergent pas vers la même limite. D'après le théorème de caractérisation séquentielle, la fonction $x \to E\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ n'a donc pas de limite en $+\infty$.