Corrigé d'exercices divers

Irène Waldspurger
waldspurger@ceremade.dauphine.fr

28 décembre 2017

Table des matières

1 Exercice 24 du chapitre 1

Attention, il faut lire $\sup(A) - \inf(A) - 2\epsilon$ *et non* $\sup(A) - \sup(B) - 2\epsilon$ *dans la question 4.*

1. D'après le théorème de caractérisation des parties bornées, puisque A est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in A, |x| \leq M. \tag{1}$$

Soit un tel M fixé.
Démontrons d'abord que B est non-vide. Soit $a \in A$ (un tel a existe puisque A est non-vide). Si on prend $x = a \in A$ et $y = a \in A$, on voit que $|x - y| = |0| = 0 \in B$. Donc $0 \in B$ et B est non-vide.
Pour tous $x, y \in A$, d'après l'inégalité triangulaire et d'après la propriété (1),

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leq M + M = 2M.$$

Ainsi, pour tout $z \in B$, $z \leq 2M$. Cela signifie que B est majorée par $2M$. D'après le théorème fondamental d'existence des bornes supérieures, puisque B est non-vide et majorée, B admet une borne supérieure.
Pour tous $x, y \in A$, $|x - y| \geq 0$ (la valeur absolue d'un réel est toujours positive). Donc B est minoré par 0. C'est donc une partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$; d'après le théorème fondamental d'existence des bornes inférieures, B admet donc une borne inférieure.

2. On a vu en résolvant la question précédente que B était minorée par 0 et que 0 appartenait à B ; 0 est donc plus petit élément de B.

3. On remarque d'abord que $\sup(A)$ et $\inf(A)$ existent, d'après les théorèmes fondamentaux d'existence, car A est non-vide et bornée.
Par définition, $\sup(B)$ est plus petit que tous les majorants de B. Si on montre que $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de B, cela impliquera donc

$$\sup(B) \leq \sup(A) - \inf(A).$$

Montrons donc que $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de B. Soit $z \in B$ quelconque. Montrons que $z \leq \sup(A) - \inf(A)$.
Soient $x, y \in A$ tels que $z = |x - y|$.
Si $x > y$, on a $z = x - y$. Comme $\sup(A)$ est un majorant de A, comme $\inf(A)$ est un minorant de A et comme x et y sont deux éléments de A, on a donc

$$\begin{aligned} &(x \leq \sup(A)) \quad \text{et} \quad (y \geq \inf(A)) \\ &\Rightarrow z = x - y \leq \sup(A) - \inf(A). \end{aligned}$$

De même, si $x \leq y$, comme $x \geq \inf(A)$ et $y \leq \sup(A)$,

$$z = y - x \leq \sup(A) - \inf(A).$$

Dans tous les cas, on a donc $z \leq \sup(A) - \inf(A)$.

On a donc montré que $\sup(A) - \inf(A)$ était un majorant de B, ce qui, comme on l'a vu, entraîne

$$\sup(B) \leq \sup(A) - \inf(A).$$

4. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Montrons

$$\exists (x, y) \in A^2, |x - y| > \sup(A) - \inf(A) - 2\epsilon.$$

D'après le théorème de caractérisation des bornes supérieures,

$$\forall \eta > 0, \exists x \in A, x > \sup(A) - \eta.$$

Si on utilise cette propriété pour $\eta = \epsilon$, on en déduit qu'il existe $x \in A$ tel que $x > \sup(A) - \epsilon$. Soit un tel x fixé.
De même, d'après le théorème de caractérisation des bornes inférieures,

$$\forall \theta > 0, \exists y \in A, y < \inf(A) + \theta.$$

Si on utilise cette propriété pour $\theta = \epsilon$, on en déduit qu'il existe $y \in A$ tel que $y < \inf(A) + \epsilon$. Soit un tel y fixé.
D'après l'une des propriétés vues en cours sur la valeur absolue,

$$|x - y| \geq x - y > (\sup(A) - \epsilon) - (\inf(A) + \epsilon) = \sup(A) - \inf(A) - 2\epsilon.$$

On a donc bien démontré qu'il existait $x, y \in A$ tels que $|x - y| > \sup(A) - \inf(A) - 2\epsilon$.

5. Utilisons le théorème de caractérisation des bornes supérieures. Il nous faut démontrer les deux propriétés suivantes :

1. $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de B ;
2. $\forall \epsilon' > 0, \exists z \in B, z > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon'$.

La première propriété est une conséquence du résultat de la question 3. En effet, puisque $\sup(B)$ est un majorant de B,

$$\forall z \in B, z \leq \sup(B) \leq \sup(A) - \inf(A).$$

Donc $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de B. (*Remarque : on l'avait d'ailleurs déjà démontré en répondant à la question 3. Il n'était pas nécessaire de le redémontrer.*)
Montrons maintenant la deuxième propriété :

$$\forall \epsilon' > 0, \exists z \in B, z > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon'$$

Soit $\epsilon' > 0$ quelconque. Il faut montrer

$$\exists z \in B, z > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon'$$

[*Intuition : on va utiliser le résultat de la question 4., appliqué à un* $\epsilon > 0$ *bien choisi. Le plus simple est de choisir* ϵ *de sorte que* $2\epsilon = \epsilon'$*, c'est-à-dire* $\epsilon = \epsilon'/2$.]

Posons $\epsilon = \frac{\epsilon'}{2} > 0$. D'après la propriété démontrée à la question 4., on obtient

$$\exists (x,y) \in A^2, |x-y| > \sup(A) - \inf(A) - 2\epsilon = \sup(A) - \inf(A) - \epsilon'.$$

Fixons $x, y \in A$ tels que $|x-y| > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon'$.
Posons $z = |x-y|$. C'est un élément de B et on a bien $z > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon'$. On a donc démontré ce qu'il fallait :

$$\exists z \in B, z > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon'.$$

2 Exercice 14 du chapitre 2

Montrons d'abord que (a) implique (b).
On suppose donc que la propriété (a) est vraie, c'est à dire que M est la borne supérieure de A, et on montre que la propriété (b) est également vraie.
Comme M est borne supérieure de A, M est un majorant de A (cela fait partie de la définition). La première partie de (b) est donc vraie.
Montrons maintenant la deuxième partie de (b), c'est-à-dire montrons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers M et dont tous les termes appartiennent à A.

[*Remarque : nous avons déjà vu des démonstrations de propriétés similaires, par exemple dans l'exercice 6 du chapitre 2, dans la définition de l'adhérence (voir la proposition de la page 75 du poly) ou dans la démonstration du théorème des bornes atteintes. Nous allons ici adapter ces démonstrations à notre problème.*]

Nous allons construire une suite a d'éléments de A telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M - \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq M. \tag{2}$$

Puisque M est la borne supérieure de A, la propriété suivante est vraie, d'après le théorème de caractérisation des bornes supérieures :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, x > M - \epsilon.$$

Soit temporairement $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Si on applique la propriété précédente à $\epsilon = \frac{1}{n+1} > 0$, on obtient :

$$\exists x \in A, x > M - \frac{1}{n+1}.$$

Fixons donc un $x \in A$ qui vérifie cette propriété. On pose $a_n = x$. On a alors

$$M - \frac{1}{n+1} \leq x = a_n.$$

De plus, comme $a_n = x$ appartient à A et comme on a vu que M était un majorant de A, on peut affirmer que $a_n \leq M$. Ainsi,

$$M - \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq M.$$

Si on applique à tous les $n \in \mathbb{N}$ cette construction, on obtient donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifiant la propriété (2).
Puisque $M - \frac{1}{n+1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$ et $M \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$, la propriété (2) entraîne, par encadrement, que a converge vers M.
Il existe donc bien une suite d'éléments de A qui converge vers M, ce qui achève de démontrer la propriété (b).

Montrons maintenant que (b) implique (a).

On suppose donc que M est un majorant de A et qu'il existe une suite a d'éléments de A qui converge vers M. On va montrer que M est la borne supérieure de A.
D'après le théorème de caractérisation des bornes supérieures, il suffit, pour montrer que M est la borne supérieure de A, de montrer que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. M est un majorant de A ;
2. $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, x > M - \epsilon$.

La première propriété est vérifiée puisque (b) est vérifiée. Il suffit donc de montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, x > M - \epsilon. \tag{3}$$

Soit alors $\epsilon > 0$ quelconque. Montrons qu'il existe $x \in A$ tel que $x > M - \epsilon$.
Soit a une suite d'éléments de A qui converge vers M (elle existe d'après la propriété (b)). La convergence de a vers M s'écrit :

$$\forall \eta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - M| < \eta.$$

Spécialisons cette propriété pour $\eta = \epsilon$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - M| < \epsilon.$$

Soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|a_n - M| < \epsilon$. Puisque $N \geq N$, on a en particulier

$$|a_N - M| < \epsilon$$

donc $a_n \in]M - \epsilon; M + \epsilon[$, et notamment

$$a_N > M - \epsilon.$$

Le réel a_N est donc un élément de A qui est strictement supérieur à $M - \epsilon$. Cela démontre donc l'existence d'un $x \in A$ tel que $x > M - \epsilon$.
Ainsi, la propriété (3) est vraie et on peut déduire du théorème de caractérisation des bornes supérieures que M est la borne supérieure de A.

3 Exercice 4 du chapitre 4

1. Démontrer qu'il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$ revient à démontrer qu'il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que $(f-g)(x_0) = 0$. Définissons donc

$$h : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) - g(x) \end{array}$$

et montrons que cette fonction s'annule au moins une fois sur $[0;1]$.
Premier cas : $h(0) < 0$
La fonction h est continue car il s'agit d'une différence de fonctions continues. Elle est définie sur un intervalle ($[0;1]$).
L'inégalité $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) \leq 0$ entraîne que

$$h(0)h(1) \leq 0$$

et donc, comme $h(0) < 0$,

$$h(1) \geq 0.$$

Ainsi, $h(0) \leq 0$ et $h(1) \geq 0$.
On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction h et aux réels $a = 0$ et $b = 1$. Le théorème nous dit qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $h(c) = 0$.

Deuxième cas : $h(0) = 0$
Dans ce cas, la fonction h s'annule au moins en 0 ; elle s'annule donc au moins une fois sur $[0;1]$.

Troisième cas : $h(0) > 0$
Ce cas est quasiment identique au premier.
La fonction h est continue car il s'agit d'une différence de fonctions continues. Elle est définie sur un intervalle ($[0;1]$).
L'inégalité $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) \leq 0$ entraîne que

$$h(0)h(1) \leq 0$$

et donc, comme $h(0) > 0$,

$$h(1) \leq 0.$$

Ainsi, $h(0) \geq 0$ et $h(1) \leq 0$.
On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction h et aux réels $a = 0$ et $b = 1$ (le théorème reste vrai lorsqu'on inverse les inégalités). Le théorème nous dit qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $h(c) = 0$.

2. Définissons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^{12} - x^{11} - 1. \end{array}$$

Il faut montrer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^+$.

[*Intuition : puisque f est continue et définie sur un intervalle, il est naturel de vouloir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Pour cela, il nous faut trouver $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que $a < b$ et $f(a) \leq 0, f(b) \geq 0$.*
Nous allons choisir $a = 0$. Pour b, nous allons d'abord montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Ensuite, il suffira de choisir b « assez grand » et on aura nécessairement $f(b) \geq 0$.]

Posons $a = 0$. On a $f(a) = 0 - 0 - 1 = -1 \leq 0$.
Construisons maintenant $b > 0$ tel que $f(b) \geq 0$. Étudions pour cela l'éventuelle limite de f en $+\infty$. Comme à l'accoutumée, on factorise le terme dominant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x^{12}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{12}}\right).$$

Puisque

$$x^{12} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{12}} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

on en déduit (par opérations algébriques sur les fonctions convergentes) que

$$f \overset{+\infty}{\to} +\infty.$$

Avec des quantificateurs, cela s'écrit

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [A; +\infty[, f(x) \geq M. \tag{4}$$

Nous allons nous servir de cette propriété pour construire $b > 0$ tel que $f(b) \geq 0$.
Posons $M = 0$. D'après la propriété (4), il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in [A; +\infty[, f(x) \geq 0.$$

Fixons un tel réel A.
Posons $b = A + 1$. (*Remarque : n'importe quelle valeur strictement supérieure à A aurait convenu ; il n'était pas nécessaire de choisir exactement $A + 1$.*) Puisque $b \in [A; +\infty[$, on a, d'après la propriété précédente,

$$f(b) \geq 0.$$

On a donc trouvé $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. De plus, $b \geq A + 1 \geq 1 > 0 = a$.
La fonction f est continue (comme somme de fonctions continues) et définie sur un intervalle. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f, pour les réels a et b précédemment définis. Le théorème implique qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que

$$f(c) = 0.$$

Puisque $[a; b] \subset \mathbb{R}^+$, cela entraîne qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(c) = 0$, ce qui est ce qu'on souhaitait démontrer.

4 Exercice 8 du chapitre 4

[*Intuition : on veut démontrer qu'il existe un* $x_0 \in [0;+\infty[$ *tel que* $f(x_0) = x_0$. *On va donc considérer l'application* $g : x \in [0;+\infty[\to x - f(x) \in \mathbb{R}$ *et on va montrer que cette application s'annule en au moins un point.*
Puisque g *est continue (comme différence de fonctions continues) et définie sur un intervalle, on peut essayer d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. Pour cela, il va nous falloir montrer qu'il existe deux réels* a, b *tels que* $g(a) \leq 0$ *et* $g(b) \geq 0$. *Comme on va le voir, on peut prendre* $a = 0$ *; en effet,* $g(0) \leq 0$ *à cause de la positivité de* f.
Pour trouver b, *on va utiliser le fait que* $x \to \frac{f(x)}{x}$ *a une limite strictement inférieure à* 1 *en* $+\infty$. *Ceci nous permettra de démontrer que, pour tout réel* x *assez grand,* $f(x) < x$, *c'est-à-dire* $g(x) > 0$. *Ainsi, si on choisit* b *« assez grand », on aura bien* $g(b) \geq 0$.]

Définissons
$$g : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x - f(x). \end{array}$$

Posons $a = 0$. Comme f est positive, d'après l'énoncé, on a que $f(0) \geq 0$. Donc
$$g(a) = g(0) = -f(0) \leq 0.$$

Contruisons maintenant un $b \in]0;+\infty[$ tel que $g(b) \geq 0$. Par hypothèse, $\frac{f(x)}{x} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, c'est-à-dire
$$\forall \epsilon > 0, \exists A \geq 0, \forall x \in [A;+\infty[\cap]0;+\infty[, \left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| < \epsilon.$$

Posons $\epsilon = 1 - \ell$ et appliquons cette propriété. Elle nous dit qu'il existe $A \geq 0$ tel que
$$\forall x \in [A;+\infty[\cap]0;+\infty[, \left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| < 1 - \ell.$$

Fixons un tel réel A. Pour tout $x > A$, on a, puisque $x \in [A;+\infty[\cap]0;+\infty[$,
$$\begin{array}{ll} & \left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| < 1 - \ell; \\ \Rightarrow & \frac{f(x)}{x} \in]\ell - (1-\ell); \ell + (1-\ell)[=]2\ell - 1; 1[\\ \Rightarrow & \frac{f(x)}{x} < 1 \\ \Rightarrow & f(x) < x \\ \Rightarrow & g(x) > 0. \end{array}$$

(Pour l'avant-dernière implication, on a utilisé le fait que $x > 0$ si $x > A$.)
On a ainsi démontré que, pour tout $x > A$, $g(x) > 0$. Posons alors $b = A + 1 > A$. (*Remarque : n'importe quelle valeur strictement supérieure à* A *aurait convenu ; on aurait pu prendre* $b = A + \pi$ *ou* $b = 7A + 12$.) On a bien $g(b) > 0$.

Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g et aux réels a, b. On peut bien appliquer ce théorème car g est continue (comme différence de fonctions continues) et définie sur un intervalle et, de plus, $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$. Le théorème nous dit qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que

$$g(c) = 0.$$

Soit un tel c fixé. D'après la définition de g, $f(c) = c$.
On a donc bien démontré qu'il existait $c \in [0; +\infty[$ tel que $f(c) = c$.

5 Exercice 12 du chapitre 4

Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M \tag{5}$$

(Un tel réel M existe puisque f est bornée.)

Montrons d'abord que $f \circ g$ est bornée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, si on applique la propriété (5) avec $x = g(y)$, on voit que $|f(g(y))| \leq M$. Ainsi,

$$\forall y \in \mathbb{R}, |(f \circ g)(y)| \leq M.$$

La fonction $f \circ g$ est donc bornée.

Montrons maintenant que $g \circ f$ est bornée.

[*Intuition : on aimerait appliquer le même raisonnement à $g \circ f$ qu'à $f \circ g$ mais ce raisonnement ne fonctionne pas directement car g n'est a priori pas bornée. Afin de pouvoir tout de même reproduire ce raisonnement, nous allons montrer que g, à défaut d'être bornée, est au moins bornée sur l'image de f. Pour cela, on remarque que, puisque $|f|$ est bornée par M, son image est incluse dans le segment $[-M; M]$, puis on applique à g (qui est continue) le théorème des bornes atteintes sur ce segment.*]

La fonction $g_{|[-M;M]}$ est définie sur un segment et continue sur ce segment (car restriction d'une fonction continue). D'après le théorème des bornes atteintes, elle est donc bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M' \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [-M; M], |g_{|[-M;M]}(x)| \leq M'. \tag{6}$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, puisque $|f(y)| \leq M$ (d'après la propriété (5)), $f(y)$ appartient au segment $[-M; M]$. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, d'après la propriété (6) appliquée à $x = f(y)$, $|g(f(y))| \leq M'$. On a donc démontré :

$$\forall y \in \mathbb{R}, |(g \circ f)(y)| \leq M'.$$

Donc $g \circ f$ est bornée.

6 Exercice 14 du chapitre 4

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et elle y est continue, comme produit de composées de fonctions continues.
Pour dire si elle admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier, il faut donc déterminer si elle admet une limite finie en 0 ou non.

Première solution : la fonction sin tend vers 0 en 0 et la fonction $x \in \mathbb{R}^* \to \sin(1/x) \in \mathbb{R}$ est bornée (puisque $|\sin(1/x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$). Le produit d'une fonction bornée et d'une fonction convergeant vers 0 converge vers 0 (c'est l'exercice 8 du chapitre 3) donc f converge vers 0 en 0.
Deuxième solution (pour les personnes qui n'auraient pas fait l'exercice 8 du chapitre 3) : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) \leq |f(x)| = |\sin(x)|\,|\sin(1/x)| \leq |\sin(x)|$$

et

$$-|\sin(x)| \leq -|\sin(x)|\,|\sin(1/x)| \leq -|f(x)| \leq f(x).$$

En résumé, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$-|\sin(x)| \leq f(x) \leq |\sin(x)|. \tag{7}$$

La fonction sin converge vers 0 en 0 et la fonction « valeur absolue » également. Par composition des limites, la fonction $x \to |\sin(x)|$ converge vers 0 en 0.
La double inégalité (7) implique donc, par encadrement, que f converge vers 0 en 0.

Ainsi, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 (par la valeur 0).

2. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur cet ensemble, comme produit de composées de fonctions continues.
Pour déterminer si elle admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier, il faut donc déterminer si g admet une limite finie en 0.
[*Pour l'intuition derrière le raisonnement qui suit, voir l'exercice 2 du chapitre 5 (exercice 8 de ce document).*]
Nous allons montrer que g n'admet pas de limite finie en 0. On raisonne par l'absurde et on suppose que g admet une limite finie en 0, qu'on note ℓ.
Pour tout $x \in]-\pi/2;\pi/2[-\{0\}$, comme $\cos(x) \neq 0$, on a :

$$\cos(1/x) = \frac{g(x)}{\cos(x)}.$$

Puisque cos converge vers 1 en 0 et puisque g converge vers ℓ en 0, cette égalité entraîne (d'après les opérations algébriques sur les limites) que

$$\cos(1/x) \xrightarrow{x\to 0} \ell.$$

Or la fonction $x \in \mathbb{R}^* \to \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0 (cela se démontre de la même façon que pour la fonction $x \in \mathbb{R}^* \to \sin(1/x)$, vue en cours). C'est donc absurde.

Donc g n'admet pas de limite finie en 0 et ne se prolonge pas par continuité à $\mathbb{R}$.

7 Exercice de la page 107 du poly (question 1)

Appelons f la fonction $x \to x^n$, qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons sa dérivée.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrons que f est dérivable en x_0 et calculons $f'(x_0)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} f(x) = x^n &= ((x - x_0) + x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$, le taux d'accroissement de f entre x_0 et x vaut

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k}\right) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k}\right) - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \frac{\left(x_0^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k}\right) - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k}}{x - x_0} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x - x_0)^{k-1} x_0^{n-k}. \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction $x \to (x - x_0)^{k-1}$ admet une limite (finie) en x_0. En effet, pour $k = 1$, la fonction $x \to (x - x_0)^{k-1}$ est la fonction constante de valeur 1 ; elle converge donc vers 1 en x_0. Pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, comme $x \to x - x_0$ tend vers 0 en x_0, on peut dire que $x \to (x - x_0)^{k-1}$ converge vers $0^{k-1} = 0$, puisque c'est le produit de $k - 1$ fonctions qui convergent vers 0.
Ainsi, le taux d'accroissement admet une limite en x_0 :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x - x_0)^{k-1} x_0^{n-k} \xrightarrow{x \to x_0} \binom{n}{1} 1 \times x_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 0 \times x_0^{n-k} = n x_0^{n-1}.$$

Donc la fonction f est dérivable en x_0 et sa dérivée vaut $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$.

8 Exercice 2 du chapitre 5 (fonctions f_2 et f_3)

Commençons par la fonction f_2.

Sur les intervalles ouverts $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, la fonction f_2 est égale à la fonction $x \to \sin(x)\sin(1/x)$, qui est dérivable comme produit de composées de fonctions continues. Elle est donc dérivable sur ces intervalles (puisqu'au voisinage de chacun des points de ces intervalles, elle coïncide avec une fonction dérivable), c'est-à-dire que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, la fonction f_2 est dérivable en x_0.

Déterminons maintenant si f_2 est dérivable en 0. Étudions pour cela le taux d'accroissement en 0, c'est-à-dire la fonction $g_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g_2(x) = \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)\sin(1/x)}{x}.$$

[*Intuition : on sait que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \to \frac{\sin(x)}{x} \in \mathbb{R}$ admet 1 pour limite en 0. En revanche, la fonction $x \in \mathbb{R}^* \to \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0 : au voisinage de 0, elle « oscille » un nombre infini de fois entre -1 et 1. On peut donc imaginer que la fonction g_2, puisqu'elle est le produit d'une fonction « presque égale à 1 en 0 » et d'une fonction « très oscillante » va également être « très oscillante » et ne va donc pas admettre de limite.*
Bien sûr, ce raisonnement n'est pas du tout rigoureux. Pour démontrer rigoureusement que g_2 n'admet pas de limite en 0, on va raisonner par l'absurde et montrer que, si g_2 admet une limite, alors $x \to \sin(1/x)$ admet également une limite en 0, ce qui est en contradiction avec le cours.]

Montrons que g_2 n'admet pas de limite finie en 0. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'elle admet une limite finie en 0. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ cette limite.
La fonction $x \in \mathbb{R}^* \to \frac{\sin(x)}{x} \in \mathbb{R}$ converge vers 1 en 0. D'après les propriétés relatives aux opérations algébriques sur des fonctions convergentes, son inverse, la fonction $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z} \to \frac{x}{\sin(x)}$ converge alors vers 1 en 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, on a :

$$g_2(x) \times \frac{x}{\sin(x)} = \sin(1/x).$$

Comme on a vu que $x \to \frac{x}{\sin(x)}$ convergeait vers 1 en 0 et que g_2 convergeait vers ℓ en 0, on en déduit que $x \in \mathbb{R}^* \to \sin(1/x) \in \mathbb{R}$ est, au voisinage de 0, un produit de fonctions convergentes ; cette fonction converge donc en 0 (vers $\ell \times 1 = \ell$).
Or on a vu en cours que $x \in \mathbb{R}^* \to \sin(1/x) \in \mathbb{R}$ n'admettait pas de limite en 0. On a donc une contradiction. Donc g_2 n'admet pas de limite finie en 0, c'est-à-dire que f_2 n'est pas dérivable en 0.

D'après le raisonnement précédent, l'ensemble des points où f_2 est dérivable est $\mathbb{R}^*$.

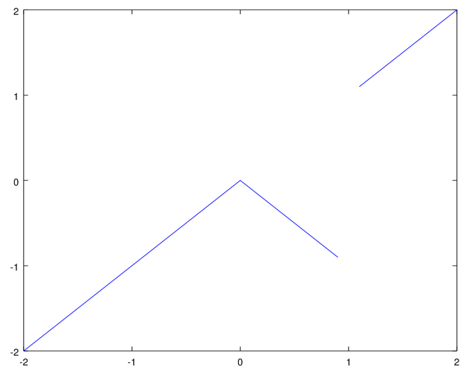
Étudions maintenant la fonction f_3.

Commençons par simplifier l'expression de f_3.
Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$,

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \frac{|x|\,|x-1|}{x-1}.$$

En étudiant le signe de x et de $x-1$ selon la valeur de x, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_3(x) \begin{array}{lll} = \frac{(-x)(-(x-1))}{x-1} = x & \text{si } x \leq 0 \\ = \frac{x(-(x-1))}{x-1} = -x & \text{si } x \in [0;1[\\ = 1 & \text{si } x = 1 \\ = \frac{x(x-1)}{x-1} = x & \text{si } x \in]1;+\infty[. \end{array}$$



Ainsi, sur les intervalles ouverts $]-\infty;0[$, $]0;1[$ et $]1;+\infty[$, la fonction f_3 est coïncide avec une fonction dérivable (selon l'intervalle, $x \to x$ ou $x \to -x$). Elle est donc dérivable sur chacun de ces intervalles.

Déterminons maintenant en étudiant le taux d'accroissement si elle est dérivable en 0 et en 1.
Pour tout $x \in]-\infty;0[$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x-0} = 1,$$

donc $\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} \overset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 1$.
Pour tout $x \in]0;1[$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x-0} = -1,$$

donc $\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} \overset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -1$.
Ainsi, le taux d'accroissement de f_3 en 0 a une limite à gauche et une limite à droite mais ces deux limites sont différentes. Le taux d'accroissement n'admet donc pas de limite en 0 : f_3 n'est pas dérivable en 0.
Regardons maintenant le taux d'accroissement en 1. Pour tout $x \in]0;1[$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1} = \frac{-x-1}{x-1}.$$

Les théorèmes sur les opérations algébriques impliquant des fonctions convergentes nous permettent d'affirmer que $\frac{-x-1}{x-1}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1^-. Le taux d'accroissement $x \in \mathbb{R} - \{1\} \to \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1}$ ne peut donc pas avoir une limite finie en 1. La fonction f_3 n'est donc pas dérivable en 1.

Ainsi, l'ensemble des points de dérivabilité de f_3 est $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

9 Exercice 7 du chapitre 5

Supposons que P est scindé à racines simples et montrons que P' est aussi scindé à racines simples.

Dans tout l'exercice, on notera p la fonction polynomiale associée à P et p' la fonction polynomiale associée à P'.

On peut supposer que P n'est pas un polynôme constant sinon le résultat est clair (la dérivée de P est alors le polynôme nul, qui est scindé à racines simples). Notons $d \geq 1$ le degré de P. On rappelle que dire que P est scindé à racines simples revient à dire qu'il admet d racines réelles distinctes. On note $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ ces racines, en les ordonnant de la plus petite à la plus grande :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_d.$$

Lemme. *P' est un polynôme de degré $d-1$.*

Démonstration. [*Remarque : ne pas hésiter à sauter cette démonstration si cela a été vu en cours d'algèbre.*]
Notons $c_0, c_1, \dots, c_d$ les coefficients de P, de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \sum_{k=0}^{d} c_k x^k.$$

Comme d est le degré de P, $c_d \neq 0$.
Pour tout k, la fonction $x \to x^k$ est dérivable, de dérivée $x \to kx^{k-1}$. La fonction p est donc également dérivable et sa dérivée p' vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p'(x) = \sum_{k=0}^{d} kc_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{d} kc_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{d-1} (k+1)c_{k+1} x^k.$$

Le polynôme P' est le polynôme associé à cette fonction polynomiale ; il vaut donc

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d-1} (k+1)c_{k+1} X^k.$$

C'est bien un polynôme de degré $d-1$ (son coefficient dominant est dc_d, ce qui est un réel non-nul puisque $d \geq 1$ et $c_d \neq 0$). $\square$

Pour montrer que P' est scindé à racines simples, il faut donc montrer que P' admet $d-1$ racines réelles distinctes. Pour cela, on va montrer que p', la fonction polynomiale associée à P', s'annule en $d-1$ points différents de $\mathbb{R}$.
Plus précisément, nous allons montrer que p' s'annule au moins une fois sur $]\alpha_1; \alpha_2[$, au moins une fois sur $]\alpha_2; \alpha_3[$ et ainsi de suite jusqu'à $]\alpha_{d-1}; \alpha_d[$. Comme les intervalles $]\alpha_1; \alpha_2[, \dots,]\alpha_{d-1}; \alpha_d[$ sont tous disjoints et au nombre de $d-1$, cela suffit pour montrer que p' s'annule au moins $d-1$ fois (et donc en fait exactement $d-1$ fois car un polynôme de degré $d-1$ ne peut pas avoir plus de $d-1$ racines).
Soit $k \in \{1, \dots, d-1\}$ quelconque. Montrons que p' s'annule au moins une fois sur $]\alpha_k; \alpha_{k+1}[$.
La fonction $p_{|[\alpha_k;\alpha_{k+1}]}$

- est continue sur $[\alpha_k; \alpha_{k+1}]$ (c'est une somme de produits de fonctions continues) ;
- est dérivable sur $]\alpha_k; \alpha_{k+1}[$ (c'est une somme de produits de fonctions dérivables) ;
- vérifie $p_{|[\alpha_k;\alpha_{k+1}]}(\alpha_k) = 0 = p_{|[\alpha_k;\alpha_{k+1}]}(\alpha_{k+1})$ (car α_k et α_{k+1} sont des racines de P).

On peut donc lui appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]\alpha_k; \alpha_{k+1}[$ tel que $(p_{|[\alpha_k;\alpha_{k+1}]})'(c) = 0$. Ainsi, p' s'annule au moins une fois sur $]\alpha_k; \alpha_{k+1}[$.
On a donc bien démontré que, pour tout $k \in \{1, \ldots, d-1\}$, p' s'annulait au moins une fois sur $]\alpha_k; \alpha_{k+1}[$.