Corrigé des exercices 1.17 et 1.21

Exercice 1.17
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right) \\
&= \left(\sum_{l=2}^{n+1} \ln(l)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right) \\
&= \left(\ln(n+1) + \sum_{l=2}^{n} \ln(l)\right) - \left(\ln(1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k)\right) \\
&= \left(\ln(n+1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k)\right) - \left(\sum_{k=2}^{n} \ln(k)\right) \\
&= \ln(n+1).
\end{aligned}$$

Exercice 1.21
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tous $i, k \in \{1, \ldots, n\}$, $\ln(i^k) = k\ln(i)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(i^k) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} k\ln(i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(i)\right).
\end{aligned}$$

De plus, le logarithme « transforme la multiplication en addition », donc

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(i) = \ln\left(1 \times 2 \times \cdots \times n\right) = \ln(n!).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(i^k) &= \sum_{k=1}^{n} k \ln(n!) \\
&= \ln(n!) \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) \\
&= \ln(n!) \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$