Corrigé des exercices 1.19 et 1.29

Exercice 1.19

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
On observe d'abord qu'on peut « supprimer » de la somme le terme correspondant à $k = 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= 0\binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.\end{aligned}$$

On a vu à l'exercice 1.8 que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.
[Remarque : ce n'est pas parce que l'énoncé suggère d'utiliser cette égalité qu'il ne faut pas la justifier, soit en la redémontrant soit en précisant qu'elle a été vue en cours. Il faut également bien préciser pour quelles valeurs de k elle est vraie. En effet, elle est fausse pour $k = 0$ (puisque nous n'avons pas défini $\binom{n-1}{-1}$) et, si on ne s'en rend pas compte, on se retrouve facilement à écrire des sommes qui n'ont pas de sens puisqu'un de leurs termes n'est pas correctement défini.]
On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

On procède au changement de variable $l = k - 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}\\ &= n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}1^l 1^{(n-1)-l}\\ &= n(1+1)^{n-1} \quad \text{(binôme de Newton)}\\ &= n2^{n-1}.\end{aligned}$$

Exercice 1.29

On veut montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^+$, l'équivalence suivante est vraie :

$$(|x| \leq z) \quad \Longleftrightarrow \quad (-z \leq x \leq z).$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}^+$ quelconques. Nous allons montrer successivement les deux implications.

1. Montrons que $(|x| \leq z) \Rightarrow (-z \leq x \leq z)$.
   Supposons que $|x| \leq z$. D'après le cours, $x \leq |x|$ et $-x \leq |-x| = |x|$. On a donc

$$\begin{aligned} x \leq |x| \leq z \\ \text{et } -x \leq |x| \leq z, \text{ d'où } -z \leq x. \end{aligned}$$

   Ainsi, $-z \leq x \leq z$.
2. Montrons que $(-z \leq x \leq z) \Rightarrow (|x| \leq z)$.
   Supposons que $-z \leq x \leq z$ et montrons que $|x| \leq z$.
   Si $x \geq 0$, alors $|x| = x \leq z$.
   Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et puisque $-z \leq x$, on a $-x \leq z$, c'est-à-dire $|x| \leq z$.
   Dans les deux cas, on a donc bien montré que $|x| \leq z$.